

Modelado cinemático de un robot industrial de 6 GDL mediante el uso de cuaterniones

Luis Castillo Bermúdez¹, Bernardino Benito Salmerón Quiroz², Gerardo Villegas Medina², Cesar Valentín Sarmiento¹, Felipe de Jesús Diez Ramírez¹, Ismael Sánchez Rincón¹

¹Maestría en Ingeniería en Automatización de Procesos Industriales, Universidad Politécnica de Puebla, Tercer Carril del Ejido Serrano s/n San Mateo Cuanalá. Juan C. Bonilla, Puebla, México

luis.castillo@uppuebla.edu.mx

²Instituto Politécnico Nacional (I.P.N.), SEPI ESIME Azcapotzalco, Av. de la Granjas 682,02250, México, D.F., México.

Resumen

En el estudio de los sistemas robóticos ha sido necesario el desarrollo de modelos de análisis y simulación. Para el caso de los modelos de análisis ha sido fundamental desarrollar herramientas matemáticas que puedan resolver de manera eficiente el problema cinemático directo e inverso, de los robots industriales de cadena cinemática abierta.

Una de estas herramientas matemáticas son los cuaterniones, los cuales, describen el movimiento rotacional de los elementos que conforman al robot, de una forma simple, reducen los recursos computacionales usados con las técnicas convencionales de modelado y provén una forma compacta de al momento de realizar el modelado.

En el desarrollo de este trabajo se presenta el modelo basado en cuaterniones de un robot antropomórfico industrial de 6 GDL ampliamente usado en tareas de manufactura. La realización del modelo y simulación son programados en el entorno MATLAB, en el cual se muestran algunas simulaciones realizadas.

1. Introducción

El desarrollo tecnológico en áreas como la aeronáutica, animación y la robótica han despertado el interés en el estudio de los cuaterniones, de tal manera que, se han estudiado nuevas formas con las cuales el álgebra de cuaterniones muestre un mayor grado de efectividad [1].

La cinemática directa cartesiana de los robots manipuladores permite una descripción entre las coordenadas cartesianas del extremo final del robot y las coordenadas de las articulaciones [2]. La convención Denavit–Artenberg es una herramienta de suma utilidad, para la obtención del modelo cinemático directo de los robots manipuladores. Existen algunos otros métodos para llevar a cabo la solución de la cinemática directa, como lo son matrices de transformación homogénea, ángulos de Euler y el uso de cuaterniones. Estos últimos proveen una forma simple de representar las rotaciones que realizan las articulaciones de un robot, también nos ayudan a evitar una de las principales desventajas que tiene el uso de matrices homogéneas o ángulos de Euler llamado “Gimbal – Lock” [3].

En el presente trabajo se muestra como mediante el álgebra de cuaterniones se desarrolla un operador lineal el cual obtiene los valores que representan la orientación y posición de los elementos que constituyen el robot antropomórfico de 6 GDL IRB 1600 de la empresa ABB®, programando el modelo desarrollado mediante el análisis del álgebra de cuaterniones en el paquete computacional MATLAB® mismo software que se encarga de realizar la simulación de los resultados obtenidos de la evaluación numérica del modelo.

La programación y simulación del modelo cinemático del robot IRB 1600 por medio de cuaterniones, tiene como resultado el análisis de la secuencia de movimientos realizados por dicho robot, lo cual, es de gran utilidad tanto de forma industria como didáctica, en el entendimiento y uso de los cuaterniones.

2. Álgebra de cuaterniones

En esta sección se pretende introducir de forma simple las bases algebraicas con las cuales se rigen los cuaterniones, para posteriormente hacer uso de ellas al momento de construir el modelo del robot basado en estas operaciones.

Un cuaternión es una forma alternativa de representar rotaciones a través de cualquier eje [4,5]. Matemáticamente son una extensión del conjunto de números complejos, la orientación de un cuerpo rígido puede ser representada a través del cuaternión unitario, el cual consiste en un vector unitario e , conocido como eje de Euler, un ángulo de rotación ϕ sobre dicho eje, el cuaternion $Q \in H$ se define como:

$$Q = (q_0 \langle i q_1 \ j q_2 \ k q_3 \rangle) = (q_0 + \mathbf{q}) = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{e} \right) \quad (1)$$

donde q_0 es considerada como la parte real y \mathbf{q} como la parte compleja, del algebra de cuaterniones se desprenden algunas operaciones básicas como la suma \oplus , multiplicación \otimes , el conjugado de un cuaternion y su norma.

1) La suma de cuaterniones se define de forma idéntica a la suma de los vectores ordinarios en R^3 es decir, dados los cuaterniones $Q, P \in R^4$ la suma de estos cuaterniones tiene como resultado otro cuaternión:

$$Q \oplus P = (q_0 + p_0 + \langle i(q_1 + p_1) + j(q_2 + p_2) + k(q_3 + p_3) \rangle) \quad (2)$$

recordando que la suma de los vectores en R^3 conserva las propiedades de campo, así que los cuaterniones pertenecientes a R^4 también conservan esas propiedades.

2) Para el producto de cuaterniones se establece:

a) El producto de un cuaternión por un escalar, conserva las propiedades de campo establecidas para los vectores en R^3 , por lo que, se define de forma directa, es decir, si c es un escalar y \mathbf{Q} un vector, entonces el producto resultante está dado por:

$$c\mathbf{Q} = cq_0 + \langle icq_1 + jcq_2 + kcq_3 \rangle \quad (3)$$

b) El producto entre cuaterniones está definido de tal manera que el producto fundamental especial satisfaga:

$$\begin{aligned} i^2 + j^2 + k^2 &= ijk = -1 \\ ij &= k = -ij \\ jk &= i = -kj \\ ki &= -j = -ik \end{aligned} \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que los productos mostrados en Ecuación (4), se puede notar que el producto de estos números complejos no es conmutativo, por lo tanto, se puede establecer que el producto entre dos cuaterniones no es conmutativo. Utilizando las reglas algebraicas ordinarias y los productos fundamentales

mostrados en la Ecuación (4) se puede verificar que dados los cuaterniones Q y P el producto entre ellos, tomando los las definiciones del producto punto y producto cruz, pertenecientes a los vectores en R^3 , se puede definir de forma más concisa al producto entre dos cuaterniones como [6]:

$$Q \otimes P = q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \quad (5)$$

3) Conjugado de un cuaternión, este concepto algebraico es importante al momento de realizar rotaciones ya que posee una característica que más adelante explotaremos, el conjugado de un cuaternión se define como: $Q^* = q_0 - \mathbf{q}$ es decir:

$$Q^* = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 \quad (6)$$

4) Norma de un cuaternión se denota mediante $\|Q\|$ la cual es el escalar definido por:

$$\|Q\| = \sqrt{Q \otimes Q^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (7)$$

3. Interpretación geométrica

Para poder realizar una interpretación geométrica de como los cuaterniones son una forma alternativa de un operador rotacional (un rol un poco diferente al obtenido con los operadores rotacionales matriciales). El cuaternión muestra cierta eficiencia al analizar ciertas rotaciones en R^3 (después de todo un cuaternion es numero hipercomplejo formado por un vector cuádruple). Existen algunas consideraciones algebraicas que se deben realizar para poder hacer esta interpretación, comenzando con definir, ¿cómo un cuaternión que pertenece a R^4 operar sobre un vector, que pertenece a R^3 ? Una de estas consideraciones es tomar un vector $v \in R^3$ como un cuaternión con la parte $Q \in R^4$ cuya parte real es cero, a estos cuaterniones se les llama “Cuaterniones Puros” [4], los cuales pueden ser considerados como un subconjunto de los cuaterniones denotado por $Q_0 \in R^4$.

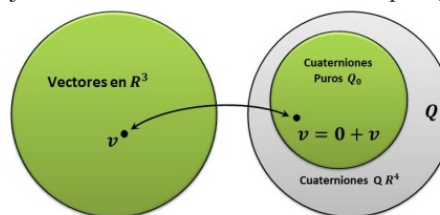


Figura 1 Correspondencia vector \leftrightarrow cuaterniones

De acuerdo con la Figura 1 se puede observar que los el simple producto de un cuaternión con un cuaternión puro no produce una rotación ya que el producto entre dos cuaterniones tiene como resultado otro cuaternión como se muestra en el siguiente producto, si $Q = (q_0 + \mathbf{q})$ es un cuaternion y $Q_0 = (0 + \mathbf{v})$ un cuaternion puro el producto $Q \otimes Q_0$ es:

$$Q \otimes Q_0 = (q_0 + \mathbf{q}) \otimes (0 + \mathbf{v})$$

$$= q_0 \cdot 0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + 0\mathbf{q} + q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v}$$

$$= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v}$$

por lo que no se puede definir el solo producto de un cuaternión por otro cuaternión puro como un operador rotacional que satisfaga las necesidades de obtener una rotación de $\mathbf{v} \in R^3$ ya que la parte real de este cuaternión resultante es diferente de cero. Ahora bien si consideramos el triple producto de cuaterniones de la siguiente forma: $Q \otimes Q_0 \otimes R = (q_0 + \mathbf{q}) \otimes (0 + \mathbf{v}) \otimes (r_0 + \mathbf{r})$ no es difícil verificar que de acuerdo con la ecuación (5) la parte real de este cuaternión es:

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) - q_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}$$

Como podemos observar solo existe una forma de que la parte real sea cero (es decir, que represente un vector en R^3), haciendo la suposición que $r_0 = q_0$, tenemos que la parte real del producto es reescrita de la siguiente forma:

$$-q_0(\mathbf{q} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}$$

claramente la parte real es cero si $\mathbf{r} = -\mathbf{q}$ lo cual significa que:

$$R = r_0 + \mathbf{r} = q_0 - \mathbf{q} = Q^*$$

de este modo podemos definir a nuestro operador rotacional como:

$$L\mathbf{v} = Q \otimes P_0 \otimes Q^* \tag{8}$$

donde P_0 es un cuaternión puro y Q y Q^* representan un cuaternión de rotación, esta formulación puede ser descrita de forma gráfica como se muestra en la Figura 2

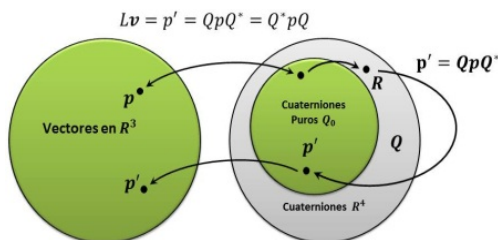


Figura 2 Operadores de cuaterniones en vectores

es claro ver que la aplicación del operador rotacional a cualquier vector que se encuentra en el eje de rotación lo hará permanecer invariante.

De acuerdo con lo anterior el operador rotacional definido en la Ecuación (8) se redefine como en [4] teniendo como esto un punto vectorial rotada a través de la acción del operador rotacional.

$$w = L\mathbf{v} = Q \otimes \mathbf{v} \otimes Q^*$$

$$= (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0^2(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \tag{9}$$

4. Construcción del modelo

En esta sección se presenta el modelo del robot IRB1600 de la empresa ABB® basado en el estudio previo del álgebra de cuaterniones, en la Figura 3 se muestra la composición del física del robot en estudio, esta estructura está formada por 6 eslabones (cuerpos

rígidos) y 6 juntas (uniones) de tipo rotacional, es un robot de 6 GDL con movimientos en el espacio 3D (x, y, z) .

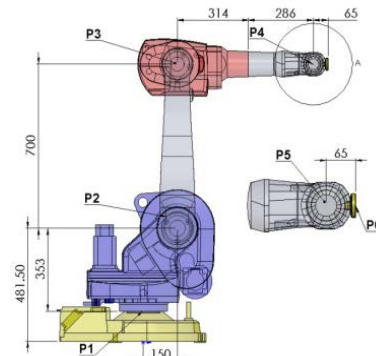


Figura 3 Modelo físico del Robot IRB1600

De acuerdo con la estructura de este robot el punto que se encuentra señalado como P_6 es el punto donde termina la cadena cinemática por lo tanto es el punto donde se localiza el efector final, en la se muestran ejes rotacionales para cada una de las juntas

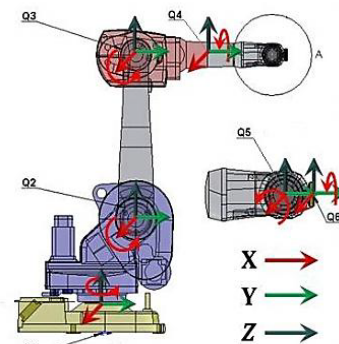


Figura 4 Ejes rotacionales para las juntas

los ejes de rotación para cada uno de los eslabones son:

Tabla 1 Ejes de rotación

JUNTA	EJE	JUNTA	EJE
1	Z	4	Y
2	X	5	X
3	X	6	Y

Con cada uno de los eslabones se definen los vectores de posición $\mathbf{v} \in R^3$ y con cada una de las uniones se definen los sistemas locales de rotación $Q \in R^4$, por lo tanto los vectores y cuaterniones de rotación queda de la siguiente forma:

Tabla 2 Vectores de posición

Vectores
$v_1 = [0 \quad 150 \quad 481]$
$v_2 = [0 \quad 0 \quad 700]$
$v_3 = [0 \quad 314 \quad 0]$
$v_4 = [0 \quad 286 \quad 0]$
$v_5 = [0 \quad 42 \quad 0]$
$v_6 = [0 \quad 23 \quad 0]$

de acuerdo con la ecuación (1) y teniendo en cuenta que e representa el vector unitario tenemos que con respecto a la Tabla 1 desarrollamos lo siguiente:

Tabla 3 Cuaterniones de rotación

Cuaternión de rotación
$Q_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) & 0 & 0 & \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \end{bmatrix}$
$Q_2 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$Q_3 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$Q_4 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$
$Q_5 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_5}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta_5}{2}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$Q_6 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_6}{2}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\theta_6}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$

tanto las rotaciones como los vectores se encuentran sobre la configuración no deformada lo que tiene como resultado que sean rotaciones de la base inercial fija localizada en el origen de coordenadas, configuración conocida como configuración absoluta. Al tratarse de una cadena cinemática la orientación de posición del P_6 es consecuencia del producto de las rotaciones de los puntos anteriores [7] teniendo como resultado la siguiente expresión:

$$Q'_i = \prod_{i=1}^n Q_i \quad (10)$$

de esta forma se cumple con ser una cadena cinemática, la cual depende cada una de la rotación anterior. Las rotaciones de cada uno de estos puntos puede ser descrita por las siguientes ecuaciones:

$$w_i = Lv_i + w_{i-1} \quad (11)$$

una vez que tenemos cada uno de los puntos rotados, se grafican como la representación del modelo gráfico del robot.

5. Simulación del modelo

En este apartado se presentaran los resultados del modelo matemático mediante cuaterniones del robot IRB1600 desarrollado en el apartado anterior.

Una vez obtenido el modelo se programa en MATLAB de forma numérica las ecuaciones (10) y (11), así como las Tabla 2 y Tabla 3 para poder representar de forma gráfica el comportamiento del modelo obtenido por medio de los cuaterniones propuestos, así se obtiene la siguiente gráfica que llamamos de posición inicial, es decir en la que el robot no ha llevado a cabo ningún giro en cualquier articulación.

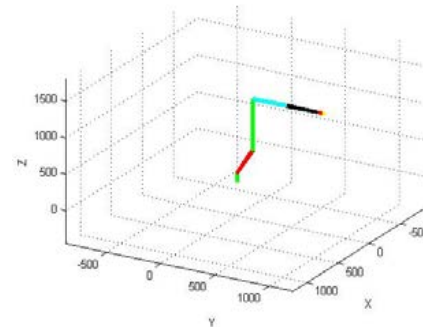


Figura 5 Posición inicial del robot

Por lo tanto si se aplica un movimiento con un ángulo de 90° al primer eslabón que para este caso es θ_1 (mostrado en la Figura 6) podemos ver el correcto comportamiento cinemático, mostrando de esta forma que el planteamiento anterior es correcto.

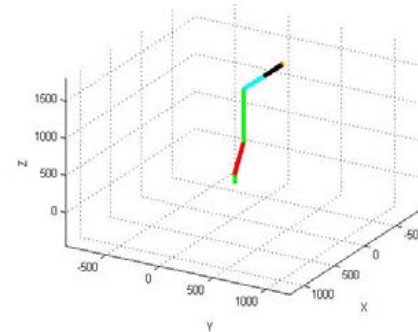


Figura 6 Giro del primer eslabón de 90°

otra característica importante con la cual se puede verificar que el modelo se encuentra funcionando de forma correcta es mediante la verificación del producto entre cuaterniones, descrito en la ecuación (10), que en todo momento sea, como ya se dijo en un principio de este artículo, un cuaternión unitario lo cual podemos verificar mediante el giro de 45° de las articulaciones 1 y 6, del robot, en la Figura 8 se pueden observar los valores obtenidos para estos dos de los cuaterniones, así como sus correspondientes normas, mientras que, en la Figura 7, se puede observar la posición adoptada por el robot después de haber girado, demostrando de esta forma que los productos entre los cuaterniones permanecen siendo unitarios mostrando de esta forma el buen funcionamiento del modelo.

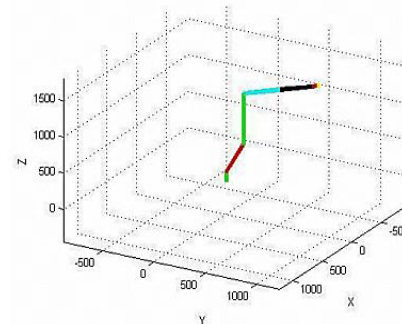


Figura 7 Posición del robot girado 45° en las articulaciones 1 y 6.

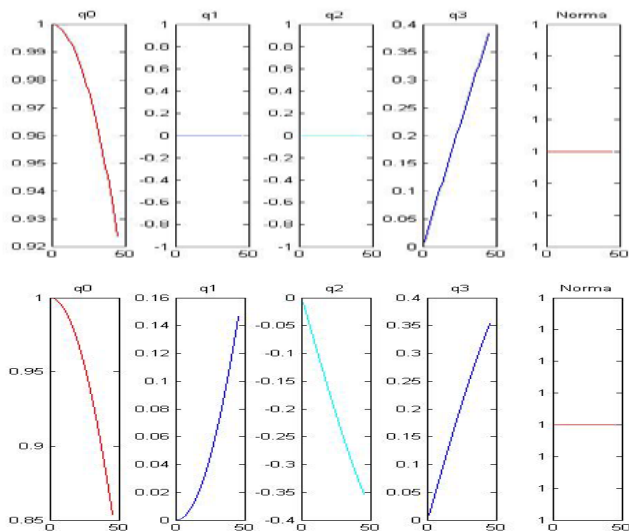


Figura 8 Cuaterniones absolutos Q_1 y Q_6

los valores de los cuaterniones mostrados en la *Figura 8*, son como ya se mencionó, los cuaterniones que representan el giro de las articulaciones 1 y 6 de forma absoluta, mostrando que cumplen con la característica de ser cuaterniones unitarios y que representan al igual que los cuaterniones relativos rotaciones de la misma articulación, otra forma de representar los cuaterniones sobre los cuales se encuentran rotando dichas articulaciones es mediante la representación de los cuaterniones relativos mostrados en la *Tabla 3*, y que son Q_1 y Q_6 , respectivamente, los valores de dichos cuaterniones se muestran en la *Figura 9*

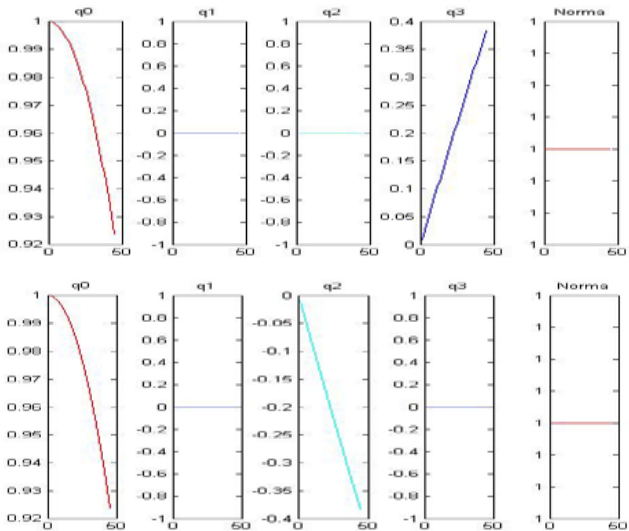


Figura 9 Cuaterniones Relativos Q_1 y Q_6

con lo mostrado en la *Figura 8* y *Figura 9* se demuestra que la configuración no deformada, propuesta en este trabajo, funciona de igual forma que la configuración relativa, la cual es usada de con más frecuencia para el modelado de robots antropomórficos de este tipo.

6. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha propuesto una forma alternativa de modelar el movimiento rotacional de un robot antropomórfico de 6 GDL basado en cuaterniones, mediante este modelo se puede verificar de forma muy sencilla la cinemática directa de este robot, también se puede verificar que el cálculo de las rotaciones es más compacta que los métodos convencionales, como son, las matrices de rotación o los ángulos de Euler, teniendo resultados igualmente confiables.

Queda por realizar la validación de este modelo para la cinemática inversa, y el desarrollo del modelo grafico en realidad virtual con el cual se podrá tener una mejor visualización del comportamiento del modelo rotacional del robot por medio de cuaterniones, así como también la validación mediante la adquisición de datos directamente del robot IRB1600.

Referencias

- [1] Benito Salmeron Q, Fermin Guerrero C, and Gerardo Villegas, "Data Fusion of the Quaternion and Non Linear Attitude Observer Applied to the Determination and Stabilization of a Mobile Robot," *Research in Computing Science*, pp. 63-72, 2013.
- [2] Emre Sariyildiz and Hakan Temeltas, "A new formulation method for solving kinematic problems of multiarm robot systems using quaternion algebra in the screw theory framework," *Turk J Elec Eng & Comp Sci*, pp. 607-628, 2012.
- [3] Andrew J. Hanson, *Visualizing Quaternions*. San Francisco, California, United States: Morgan Kaufmann, 2006.
- [4] Jack B. Kupiers, "Quaternions and Rotation Sequences," pp. 127-143, September 1999.
- [5] Erik B. Dam, Martin Koch, and Martin Lillholm, "Quaternions, Interpolation and Animation," Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, Technical Report DIKU-TR-98/5 1998.
- [6] Malcol D. Shuster, "A survey of attitude representations," vol. 41, no. 4, pp. 439-517, 1993.
- [7] Ramon Villa Medina, José Teófilo Hurtado Escalante, and Eusebio Jiménez López, "Modelación y Simulación de un Robot de 3 GDL Usando Cuaterniones y Matlab," in *10º Congreso Nacional de Mecatrónica*, Puerto Vallarta, Jalisco, 2011, pp. 214-219.