

Auto-localización para robots móviles utilizando triangulación y trilateración

Moreno Rivero Cristian Josué¹, Antonio Benítez Ruiz¹, Eduardo López Domínguez²
Ma. Auxilio Medina¹, Jorge de la Calleja¹,
¹ Universidad Politécnica de Puebla
² Laboratorio Nacional de Informática Avanzada A.C. (LANIA)

Resumen—La robótica móvil está presente en muchas áreas del desarrollo tecnológico y parte importante de esta tarea se concentra en el proceso de auto-localización de los robots en un ambiente de exploración. En este artículo se presenta la solución a este problema cuando los robots se encuentran en un ambiente controlado y se utilizan medios inalámbricos para establecer la comunicación entre ellos. Se describen además las técnicas de triangulación y la trilateración para abordar la solución al problema de auto-localización. Se presenta la simulación de estos algoritmos los cuales se soportan en el teorema de cosenos y el otro en la intersección de dos circunferencias. Las pruebas realizadas muestran que las técnicas implementadas encuentran la posición del robot en un ambiente controlado aunque estos resultados dependen de la intensidad de recepción de la señal en función de las antenas utilizadas.

Palabras Claves—Robótica Móvil, Localización de Robots Móviles, Técnicas de Posicionamiento.

I. INTRODUCCIÓN

Hoy en día el uso de robots es común en distintas actividades. Ya que estos sistemas pueden someterse a trabajos pesados, repetitivos o peligrosos, es por eso que con el avance de la tecnología se han diseñado nuevos prototipos que satisfacen algunas necesidades del ser humano. Los robots móviles pueden ser teleoperados o autónomos. Gracias a que se pueden desplazar de una manera fácil y rápida, en comparación a los robots antropomórficos actuales, es posible utilizarlos efectivamente para tareas de exploración que son peligrosas para un ser humano como detectar minas.

Debido a su capacidad de desplazamiento, la robótica móvil requiere la solución de tres tareas principales para efectuar su trabajo: el aprendizaje y uso de mapas, la localización y la planificación de trayectorias. Makarenko et al. en [1] definen estas tareas de la siguiente manera:

El aprendizaje y uso de mapas pretende responder a la pregunta ¿cómo se ve el mundo?, esto consiste en la interpretación correcta de la información obtenida por los sensores del robot y la generación de una representación del mundo (mapa) que sea explotable por el robot.

El problema de la localización aborda la pregunta ¿dónde se encuentra el robot un determinado instante de tiempo? Para estimar la posición actual del robot relativa a un mapa dado, se utiliza la información de los datos obtenidos por los sensores y las lecturas de odometría. Existen dos tipos de localización: a) localización global que determina la posición del robot sin tomar en cuenta su posición inicial y b) la localización local donde se conoce la posición inicial y se realiza un seguimiento de los movimientos del robot para estimar la posición actual [4].

La planificación de trayectorias trata de resolver el problema de ¿cómo llegar al destino de manera eficiente?. Uno de los principales objetivos de la robótica móvil es el desplazamiento autónomo de los robots, es decir, la capacidad de moverse de un punto a otro, evitando las colisiones con los posibles obstáculos que se presenten. Para alcanzar este objetivo existen dos tipos de navegación: la navegación local y la navegación global. La navegación local consiste en llevar al robot desde un punto a otro sin considerar un conocimiento previo del mundo, planificando los movimientos de acuerdo a la información local proporcionada por los sensores. Este tipo de navegación suele dar resultados fuera del óptimo (distancia recorrida, energía empleada, tiempo). La navegación global trata de llevar al robot de un punto a otro tomando en cuenta un conocimiento previo del mundo, por lo cual se debe contar con un mapa global del escenario a partir del cual se calcula una trayectoria óptima entre el destino y la posición del robot. Es importante hacer notar que existen aplicaciones donde no es posible contar con información previa sobre el medio ambiente (típicamente, todas las aplicaciones de exploración) [5].

Es de vital importancia la estimación de la localización de un vehículo móvil ya que permite al sistema de control conocer la posición en el que se encuentra dentro del entorno y por lo tanto poder decidir el camino que deberá recorrer para alcanzar el punto de destino.

Actualmente existen muchas técnicas para aproximar la localización de un robot. Este proyecto se enfoca a dos técnicas en especial la triangulación y la trilateración, estas técnicas fueron desarrolladas e implementadas a través de simulación.

Este trabajo se presenta de la siguiente manera: En la sección II, se aborda el estado del arte de los métodos de localización que existen en la actualidad. La sección III se enfoca en los métodos de estaciones fijas, donde se encuentran los métodos de triangulación y trilateración. Se presenta además el desarrollo matemático de estas técnicas. En la sección IV, se describe la herramienta de simulación, la interfaz y el funcionamiento de cada una de sus áreas de trabajo. Por último en la sección V se presentan pruebas, resultados y conclusiones de este proyecto.

II. LOCALIZACIÓN DE ROBOT MÓVILES

Los métodos desarrollados para la localización se pueden agrupar según tres tendencias [2]:

- Medidas internas
- Percepción del entorno
- Estaciones de transmisión

La tabla 1 muestra las técnicas y métodos que se usan para la localización de robots móviles durante la exploración o navegación en un ambiente.

Técnicas	Métodos
Medidas internas	<ul style="list-style-type: none"> • Odometría • Navegación inercial
Estaciones de transmisión	<ul style="list-style-type: none"> • Estaciones fijas • Estaciones móviles
Marcas en el entorno	<ul style="list-style-type: none"> • Marcas artificiales • Marcas naturales

Tabla 1 Técnicas de localización para robots móviles.

LOCALIZACIÓN BASADA EN MEDIDAS INTERNAS

La forma más simple de estimar la posición y orientación de un robot móvil consiste en integrar la trayectoria recorrida por éste a partir de una serie de medidas internas, como las vueltas dadas por las ruedas, velocidades, aceleraciones, cambios de dirección y sentido [3].

LOCALIZACIÓN BASADA EN ESTACIONES DE TRANSMISIÓN

Es un tipo de sistema de posicionamiento absoluto, también conocido como balizas de radio- frecuencia (RF) [4]. La ventaja de esta técnica consiste en proporcionar la localización absoluta del vehículo en un área suficientemente grande sin requerir infraestructura alguna del entorno. Por sus características éstos sistemas son adecuados para utilizarse en aplicaciones donde el vehículo ha de moverse en entornos muy diversos y debe recorrer grandes distancias.

LOCALIZACIÓN BASADA EN MARCAS EN EL ENTORNO

Los estimadores basados en la percepción del entorno emplean

sensores que suministran información sobre el ambiente, con esta información se aproxima la localización del robot móvil mediante comparación de esta información con otros datos o modelo conocido del entorno [4].

2.1 ESTACIONES DE TRANSMISIÓN

La configuración de estos sistemas está basada en un receptor (o un tranceptor) a bordo del vehículo y un conjunto de estaciones transmisoras de RF ubicadas en lugares conocidos.

ESTACIONES FIJAS

Los sistemas de posicionamiento mediante estaciones fijas son básicamente de dos tipos:

- Triangulación
- Trilateración

2.1.1 TRIANGULACIÓN

La triangulación es un método que basa la localización del robot móvil en la capacidad del receptor o antena para conocer los ángulos de recepción de las señales emitidas y la posición de los emisores. Los principales inconvenientes de este método son: la forma de calcular de manera precisa el ángulo con el que el emisor está enviando su señal, ya que se requiere un sistema de antenas direccionales muy precisas; después de obtener los ángulos se aplica algún algoritmo basado en funciones trigonométricas para determinar la posición del robot. Un ejemplo práctico de la implementación de este método es su utilización para la localización de los barcos en alta mar. En la Figura 1 se puede observar el método de triangulación.

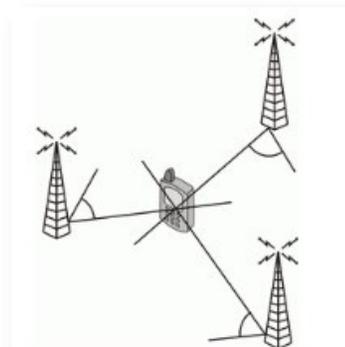


Fig. 1. Método de triangulación. Se miden ángulos entre los nodos a través de antenas direccionales.

2.1.2 TRILATERACIÓN

Este método consiste en estimar el retardo de propagación, para esto se calcula el tiempo en que tarda en llegar la señal del transmisor al receptor y después utiliza el tiempo de retardo para calcular la distancia entre ellos; de esta manera este método se puede utilizar para un número de tranceptores localizados en lugares de coordenadas conocidas como se muestra en la Figura 2. Los sistemas activos cubren desde los 100 m. hasta casi los 100 Km con una exactitud de 2 m.

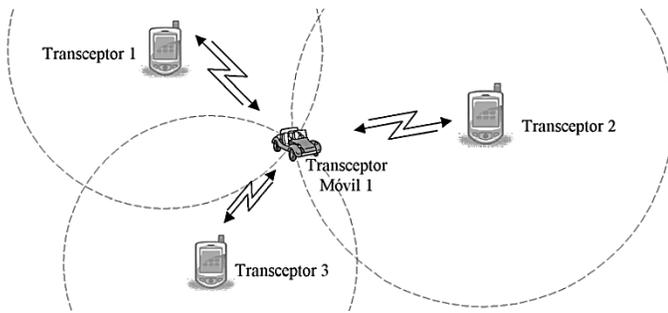


Fig. 2. Método de trilateración. Calcula la distancia midiendo el retardo de la señal.

El sistema opera de la siguiente manera: El transceptor móvil emite una señal de identificación que es captada por varios transceptores fijos, que la devuelven adicionando su propio código de identificación. El retardo que existe entre el instante en que el robot móvil emite la señal y el instante en que recibe la respuesta de las estaciones fijas determina la distancia que separa al robot de las estaciones fijas. Son necesarias al menos tres estaciones fijas para evitar ambigüedades en la localización del robot móvil

Los esquemas de trilateración ultrasónicos ofrecen una exactitud aceptable y son una solución de bajo costo al problema del posicionamiento de robots móviles. Debido al alcance relativamente corto del ultrasonido, estos sistemas son adecuados para operar en pequeñas áreas de trabajo siempre que no existan obstáculos significativos que interfieran con la propagación de la señal.

2.2 ESTACIONES MÓVILES

Los sistemas de posicionamiento mediante estaciones móviles operando desde satélites son hoy en día los de mayor interés para robots móviles [5]. El primer sistema de posicionamiento mediante satélites está basado en el cambio de frecuencia experimentado por las señales de radio transmitidas por éstos, conocido como efecto Doppler. En la actualidad este sistema ha sido remplazado por uno mucho más potente denominado GPS (Global Positioning System).

El GPS (su nombre correcto es NAVSTAR-GPS) emplea una constelación de 24 satélites (incluyendo tres de reserva) orbitando la Tierra cada 12 horas a una altura de 20.200 Km. aproximadamente. Cuatro satélites son colocados en cada una de seis órbitas cuyos planos están separados 55° a partir del plano del Ecuador. Cada uno de ellos transmite dos señales de radio en alta frecuencia, moduladas por un pseudo-ruido binario en las que se codifican en forma compleja información sobre el instante en el que la señal fue transmitida e información orbital, entre otras cosas. Empleando al menos tres satélites, el receptor calcula por trilateración la altitud, latitud y longitud del vehículo de forma “instantánea y continua” (tiempos entre 30 y 60 nseg.). También puede determinar la velocidad a partir del desplazamiento en frecuencias mediante el efecto Doppler.

III. DESARROLLO DE TÉCNICAS DE AUTO-LOCALIZACIÓN

Actualmente existen muchos dispositivos inalámbricos como son: Wi-Fi, Bluetooth, Xbee, RI entre otros. Con ayuda de estas tecnologías se puede crear un sistema de localización basada en una arquitectura inalámbrica. La principal ventaja de la tecnología inalámbrica es la libertad de movimiento para poder calcular su posición en cualquier instante de tiempo, sólo haciendo referencia a las estaciones estáticas.

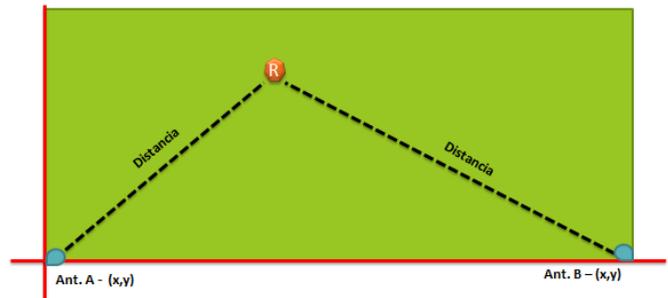


Fig. 3. Ambiente de Trabajo. Las antenas del ambiente pueden ser dispositivos inalámbricos que ayudan a calcular la distancia al robot.

Este proyecto considera un ambiente de trabajo como el que se muestra en la Figura 3, donde existen dos antenas fijas y el ambiente tiene como referencia estar colocado sobre un plano positivo, es decir, las abscisas y las ordenadas son positivas; dentro de este ambiente puede navegar un robot libremente. Así, utilizando las antenas se puede estimar la posición global del robot con respecto al ambiente.

Para encontrar la posición del robot dentro de un plano se usaron dos técnicas, las cuales se soportan en el teorema del coseno y en el concepto de intersección entre dos circunferencias.

3.1 TEOREMA DEL COSENO

El teorema del coseno es una extensión del teorema de Pitágoras para triángulos que no contienen un ángulo recto [6].

El teorema del coseno dice que si se tiene un triángulo determinado por los vértices ABC , como el que se muestra en la Figura 4, en donde α, β, γ son los ángulos, y a, b, c los lados respectivamente opuestos a estos ángulos, entonces se puede deducir la ecuación (1).

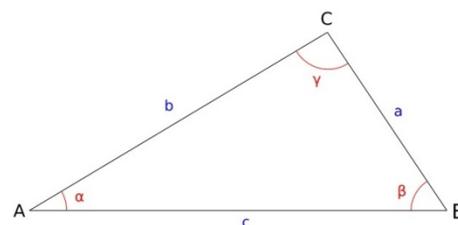


Fig. 4. Triángulo que no contiene un ángulo recto, al cual se le puede aplicar el teorema del coseno.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad (1)$$

En el ambiente de trabajo se pueden conocer los 3 lados del triángulo, es decir a, b, c . El lado c corresponde a la distancia entre las antenas y como son estáticas, se puede calcular su valor, mientras que a y b son las distancia del robot a cada una de las antenas respectivamente. Así, la solución consiste en encontrar los ángulos α y β , después se calcula la ecuación de la recta usando la formula de punto - pendiente, donde el punto es la posición de cada antena y con ayuda del ángulo se calcula la pendiente.

Despejando del teorema del coseno se puede encontrar cada uno de los dos ángulos, como se ve en la ecuación (2).

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) \quad (2)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$

Habiendo calculado el valor de los ángulos se aplica la tangente para obtener la pendiente de las rectas y se obtiene la ecuación de cada recta. Utilizando estas dos ecuaciones, se construye un sistema que se resuelve por algún método (por ejemplo, el de determinantes), de esta manera se calcula las coordenadas del punto de intersección (x, y) que satisface a ambas ecuaciones, dicho punto es la posición el robot en el plano.

3.2 INTERSECCIÓN DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

La idea de esta solución nace observando la recta secante que interseca a dos circunferencias, como se observa en la figura 5.

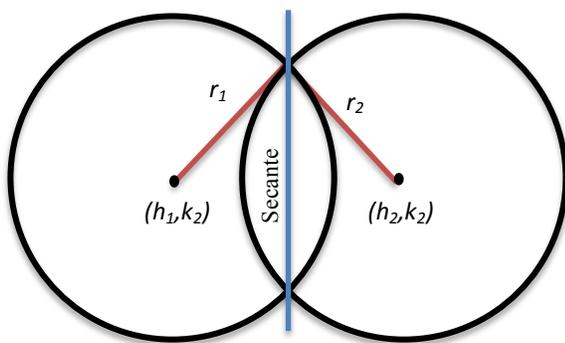


Fig. 5. Circunferencias secantes que tiene dos puntos en común.

Las ecuaciones de las circunferencias son de segundo orden, si se desea encontrar las coordenadas de los puntos de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones, pero en este caso las coordenadas del centro de las circunferencias tienen algo en común, el valor de la ordenada es igual, es decir; las coordenadas de centro de las dos circunferencias son (h_1, k_1) y (h_2, k_2) , respectivamente, en donde $k_1 = k_2$.

Sobreponiendo este esquema de circunferencias sobre el ambiente de trabajo, se puede ver que las coordenadas del

centro de las circunferencias corresponden a las posiciones de las antenas fijas y los radios son las distancias de las antenas al robot. Esto se puede observar en la Figura 6.

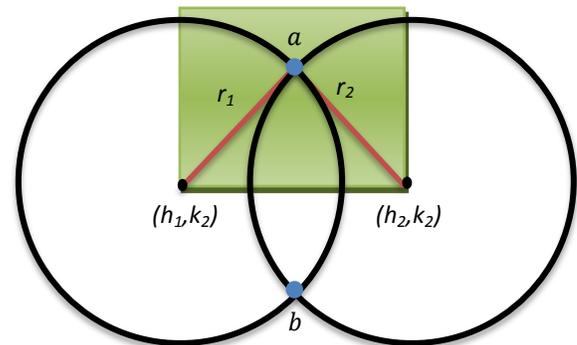


Fig. 6. Los centros de las circunferencias y las antenas tienen las mismas coordenadas.

Es necesario encontrar los puntos de intersección de las circunferencias. Si se observa la figura 6, se puede notar que el punto a corresponde a la posición del robot mientras que el punto b está fuera del ambiente de trabajo. La diferencia entre los puntos es el valor de la ordenada, es decir mientras una es positiva la otra es negativa. Por lo tanto, se descarta la negativa, porque no forma parte del ambiente ya que se está trabajando en el primer cuadrante del plano cartesiano donde los valores de las abscisas y de las ordenadas son positivas.

Al resolver el sistema de ecuaciones se tienen dos soluciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2) donde los valores de las x son iguales pero las y son diferentes. Para encontrar las coordenadas del robot se parte del hecho de que se tienen dos circunferencias con centros en (h_1, k) y (h_2, k) es decir el valor de las ordenadas son iguales y los radios r_1 y r_2 respectivamente pueden ser diferentes o iguales por lo tanto, las ecuaciones de la circunferencia quedan como en la ecuación (3).

$$\begin{aligned} (x - h_1)^2 + (y - k)^2 &= r_1^2 \\ (x - h_2)^2 + (y - k)^2 &= r_2^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Desarrollando las ecuaciones se obtiene la ecuación (4):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xh_1 - 2yk + h_1^2 + k^2 - r_1^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2xh_2 - 2yk + h_2^2 + k^2 - r_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Para simplificar se utiliza la siguiente nomenclatura y obtenemos el sistema como se muestra en la ecuación (5).

$$\begin{aligned} E_1 &= -2^2k \\ E_2 &= -2^2k \\ D_1 &= -2h_1 \\ D_2 &= -2h_2 \\ F_1 &= h_1^2 + k_1^2 + r_1^2 \\ F_2 &= h_2^2 + k_2^2 + r_2^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Así, la ecuación general de la circunferencia queda como en la ecuación (6).

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad (6)$$

También se observa que $E_1 = E_2$ por lo que la ecuación de la recta secante queda como se ve en la ecuación (7).

$$(D_1 - D_2)x + (F_1 - F_2) = 0 \quad (7)$$

Despejando a x , se obtiene la ecuación (8).

$$x = \frac{F_2 - F_1}{D_1 - D_2} \quad (8)$$

Los valores que se obtienen para la coordenada x son iguales porque los dos puntos están en la misma abscisa, para encontrar la coordenada y es necesario sustituir el valor de x en la ecuación original de la circunferencia, así sustituyendo la ecuación (8) en la ecuación (6) se obtiene la ecuación (9).

$$\left(\frac{F_2 - F_1}{D_1 - D_2}\right)^2 + y^2 + D_1\left(\frac{F_2 - F_1}{D_1 - D_2}\right) + E_1y + F_1 = 0 \quad (9)$$

Reorganizando la ecuación 9 se obtiene la ecuación 10:

$$y^2 + E_1y + \left(\frac{F_2 - F_1}{D_1 - D_2}\right)^2 + D_1\left(\frac{F_2 - F_1}{D_1 - D_2}\right) + F_1 = 0 \quad (10)$$

Suponga que $c = \left(\frac{F_2 - F_1}{D_1 - D_2}\right)^2 + D_1\left(\frac{F_2 - F_1}{D_1 - D_2}\right) + F_1$, entonces reescribimos para obtener la ecuación 11

$$y^2 + E_1y + c = 0 \quad (11)$$

Por ultimo se aplica la fórmula general para solucionar ecuaciones de segundo orden y poder encontrar dos valores de la ordenada y , el valor que es positivo es el que corresponde a la posición del robot, el otro se descarta.

$$y = \frac{-E_1 \pm \sqrt{E_1^2 - 4(1)(c)}}{2(1)}$$

IV. IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE AUTO-LOCALIZACIÓN

Se implementó una simulación para probar las técnicas de localización descritas en la sección anterior. La idea es auto-localizar un robot mediante antenas inalámbricas, se ocupó un ambiente predefinido como se muestra en la Figura 7. El ambiente consta de 2 antenas fijas (dichas antenas en tiempo real puede ser Wi-Fi, xbee, bluetooth, etc.). Las antenas que tienen coordenadas preestablecidas simulan calcular la distancia que existe del robot a cada una de ellas.

El cálculo de la distancia de una antena al robot se hace mediante la distancia euclidiana porque lo importante en esta simulación es observar los resultados que se obtienen con las técnicas de auto-localización.

Después de tener la distancia de cada antena se calcula la posición del robot. Para llevar a cabo lo anterior se implementaron dos algoritmos los cuales fueron basados en el teorema del coseno y la intersección entre dos circunferencias.

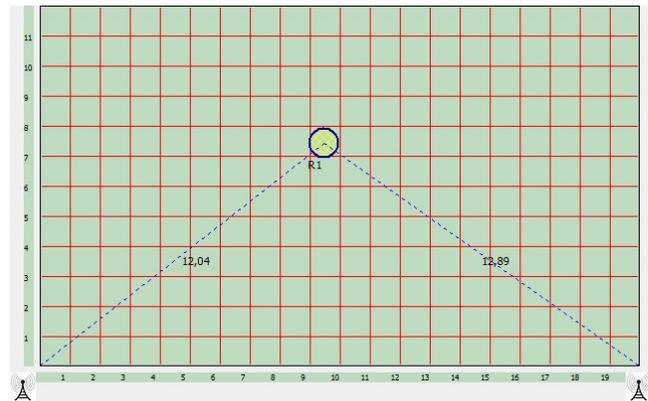


Fig. 7. Ambiente simulado. El círculo representa al robot y se observa la distancia de las antenas al robot.

El desarrollo de la simulación se llevó a cabo en el lenguaje de programación Delphi XE sobre el sistema operativo de Windows 7. La interfaz quedó compuesta de 5 áreas como se muestra en la figura 8.

4.1 ÁREA DE CONFIGURACIÓN DEL AMBIENTE

En esta área se elige el tamaño de la cuadrícula que se requiere, tiene tres tamaños de cuadro con los cuales se pueden variar las dimensiones del área de trabajo, también contiene un reporte de la posición del ratón cuando está sobre el ambiente; esta posición permite identificar las coordenadas que tiene el robot dentro del plano.

4.2 ÁREA DEL AMBIENTE DE TRABAJO

Se puede visualizar el plano con su eje de la ordenada y el eje de la abscisa. Es un ambiente dinámico que modifica sus dimensiones dependiendo de la configuración que se eligió. Cuando se da clic sobre el ambiente se dibujan los círculos que simulan ser los robots; también muestra la distancia calculada de las antenas al robot.

4.3 ÁREA DE BOTONES

En este sector se tienen 3 botones: el primero tiene la función de calcular la distancia de las antenas al robot; un segundo botón estima la posición del robot usando la técnica del teorema del coseno, a la par se reportan estos cálculos en otra área de la simulación. Por último se tiene un botón que calcula la posición del robot utilizando la técnica de intersección entre dos circunferencias.

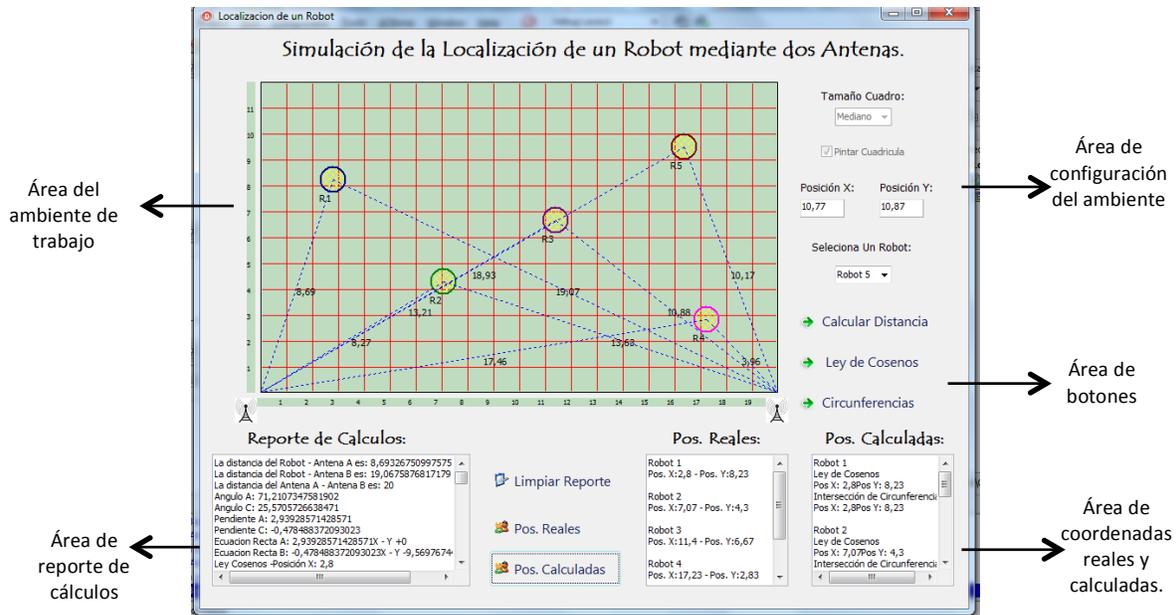


Fig. 8. Ambiente Simulado. Esta compuesto por varias áreas que permiten calcular la posición de hasta 5 robots usando las técnicas del teorema de cosenos e intersección de circunferencias.

4.4 ÁREA DE REPORTE DE CÁLCULOS

En esta área se observan todos los cálculos que realizan las técnicas de ley de cosenos e intersección entre circunferencias. Algunos de los resultados que se reportan son el valor del ángulo encontrado, la ecuación de cada recta y el punto de intersección entre las rectas. En el lado derecho de esta caja de resultados hay tres botones, el primero es para limpiar el reporte de los cálculos, el segundo y tercer botón sirven para mostrar las coordenadas reales y las estimadas.

4.5 ÁREA DE COORDENADAS REALES Y ESTIMADAS

Se pueden observar dos áreas de texto, una corresponde a las coordenadas reales y otra para las coordenadas calculadas por las técnicas de teorema de cosenos y la de intersección de dos circunferencias; de esta forma se pueden comparar qué tan certeros fueron los resultados obtenidos por ambas técnicas.

V. PRUEBAS, RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se realizaron varias pruebas en el simulador, la implementación de los dos algoritmos propuestos dieron muy buenos resultados. En la Tabla 2 se pueden observar los resultados de cada algoritmo y las coordenadas exactas de cada robot para verificar el margen de error que existe entre los cálculos. Después de realizar las pruebas se puede observar que ninguno de los algoritmos es mejor que el otro, es decir, desde el punto de vista matemático los dos ofrecen resultados muy certeros, ya que son métodos completos. Cuando las distancias se obtengan mediante algunos de los dispositivos inalámbricos entonces podrán variar los resultados pero dependerá de la exactitud que tenga la distancia obtenida por la antena inalámbrica.

Robot	Coordenadas Reales (x, y)	Técnicas implementadas	
		Ley cosenos (x, y)	Circunferencias (x, y)
Robot 1	(4.57, 9.47)	(4.57, 9.47)	(4.57, 9.47)
Robot 2	(16.93, 9)	(16.93, 9)	(16.93, 9)
Robot 3	(7.2, 3.47)	(7.2, 3.47)	(7.2, 3.47)
Robot 4	(15.67, 3.6)	(15.67, 3.6)	(15.67, 3.6)
Robot 5	(7.2, 3.47)	(7.2, 3.47)	(7.2, 3.47)

Tabla 2 Los resultados de los algoritmos implementados son buenos ya que son métodos completos.

Este desarrollo es parte de un proyecto a mayor escala, el cuál consiste en explorar de manera distribuida un ambiente controlado. Para ello es indispensable que cada uno de los robots sea capaz de auto localizarse. Para ello, utilizaran un dispositivo inalámbrico de tipo XBee. Este dispositivo será el encargado de proporcionar el RSSI (Indicador de fuerza de señal de recepción) de la antena al robot y mediante alguno de los métodos matemáticos se estimará la distancia y la localización del robot dentro del ambiente.

REFERENCIAS

- [1] Xueshan Gao, Kejie Li, Yan Wang, Guangliang Men, Dawei Zhou, and K. Kikuchi. A floor cleaning robot using swedish wheels. In Robotics and Biomimetics, 2007. ROBIO 2007. IEEE International Conference on, pages 2069–2073, 2007.
- [2] Calderón Estevez, Leopoldo, "Sensor ultrasónico adaptivo de medidas de distancia", Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España, 1989.
- [3] Cox, I.J., "Blanche - An experiment in guidance and navigation of an autonomous robot vehicle", IEEE, Trans RA, vol. 7, número 2, 1991.
- [4] González Jiménez, J y Ollero Baturone, A. "Estimación de la posición de un robot móvil" Informática y Automática. Vol.29, pp.3-18. Asociación Española de Informática y Automática. Abril - 1996.
- [5] Borenstein, J., Everett, H.R. and Feng, L. "Where am I? Sensors and Methods for Mobile Robot Positioning". Universidad de Michigan, USA, Abril-1996.
- [6] Charles H. Lehmann, Geometría analítica, Limusa, 1990.