

## MODELADO MATEMÁTICO DE SISTEMAS CAÓTICOS ORIENTADO A LA SÍNTESIS DE CIRCUITOS

**Jesús Manuel Muñoz Pacheco**

e-mail: pacheco008@hotmail.com

**Richard Torrealba Meléndez**

e-mail: richard\_torm@hotmail.com

**Roberto Javier Romero y Viloria**

e-mail: rromeroviloria@gmail.com

**Resumen:** La aplicación de modelos de comportamiento analógicos para simular el comportamiento de un sistema caótico, el circuito de Chua, el cual consiste de cinco elementos de circuito: un resistor lineal, un inductor, dos capacitores y un resistor no-lineal conocido como el diodo de Chua. El último elemento es modelado por una función I-V lineal a tramos para formular un sistema de ecuaciones diferenciales dinámicas lineales. Este problema de valor inicial es solucionado aplicando el algoritmo de integración numérica Runge-Kutta para calcular una secuencia de fenómenos caóticos. Se hace énfasis en la utilidad del modelado matemático y la simulación numérica para estimar los valores de los elementos de circuito de tal forma que la síntesis del diodo de Chua pueda ser realizada directamente utilizando dispositivos activos, tales como amplificadores operacionales de voltaje.

**Palabras clave:** Circuito de Chua, Caos, Simulación numérica, Opamps.

### 1 Introducción

Los sistemas caóticos han sido conocidos por largo tiempo, sin embargo recientemente se ha demostrado que el caos puede ser controlado y, en consecuencia, sincronizar. Esta clase de sistemas prometen tener un impacto importante en variadas y novedosas aplicaciones, entre las que destacan dispositivos y circuitos de alto rendimiento (ejem. moduladores Sigma-Delta y convertidores de potencia), mezclado de líquidos, reacciones químicas, sistemas biológicos (ejem. en el cerebro humano, corazón y procesos perceptuales), manejo de crisis (ejem. en electrónica de potencia), procesamiento de información segura y en la toma de decisiones de eventos políticos, económicos y militares. Esta nueva y retadora área de investigación es

interdisciplinaria, pues involucra a los ingenieros de control y de sistemas, a físicos teóricos y prácticos, matemáticos, fisiólogos y sobre todo a ingenieros electrónicos. La palabra "caos" hace referencia a cierto tipo de comportamiento dinámico complejo, que posee características especiales tales como ser extremadamente sensitivo a pequeños cambios en las condiciones iniciales y tener un exponente de Lyapunov positivo [1]-[9]. En otras palabras, el "caos" es simplemente un comportamiento impredecible de un sistema determinístico a largo término. Debido a que estas características son no-lineales; los sistemas generadores de caos son mucho más complejos que los sistemas lineales. En efecto, incluso el sistema caótico más simple exhibe una variedad de comportamientos [7], [8], que únicamente pueden ser completamente analizados con la ayuda de poderosos recursos de software [2], [3]. La meta de investigación en los sistemas caóticos es, por lo tanto, entender cómo un sistema dinámico determinístico puede exhibir un comportamiento caótico, además de saber qué clase de sistemas son capaces de generar este comportamiento, como también los mecanismos disponibles para controlarlo, o las metodologías para realizarlo físicamente con dispositivos electrónicos, y sin dejar a un lado las implicaciones teóricas y prácticas que se produzcan [1]-[8].

Recientemente, el diseño teórico y la realización en hardware de diferentes osciladores caóticos han generado mucha atención por parte de la comunidad científica mundial debido a las potenciales aplicaciones en diversos sistemas de información y tecnologías basadas en caos [4]-[6]. Esto ha estimulado a la generación de sistemas caóticos, utilizando circuitos y dispositivos electrónicos simples [1]. Sin embargo, en [2] se ha identificado que este proceso es complejo, debido a la necesidad de diseñar un resistor no-lineal con múltiples segmentos, el cual es la base para la

generación de caos con múltiples enrollamientos [2]. Para emular el comportamiento de un resistor no-lineal se emplean típicamente amplificadores de algún tipo, tales como de voltaje, corriente, transconductancia, etc., los cuales deben ser capaces de manejar amplios rangos dinámicos y, consecuentemente, elevados voltajes de polarización en relación directa con el número de segmentos con los que se requiera el resistor no lineal. De esta manera, las características reales de los amplificadores siempre limitan o prohíben una realización experimental [2]. Considerando las dificultades arriba mencionadas, una metodología sistemática para el modelado y simulación de sistemas caóticos se ha propuesto y analizado en este artículo. La idea es hacer uso del modelado matemático y la simulación numérica para estimar los valores de los componentes de circuito (resistores, capacitores, inductores, ganancias, etc.) antes de la realización física, conduciendo directamente a la síntesis de los sistemas caóticos al utilizar amplificadores de voltaje.

Es importante mencionar que el software SPICE (Simulation Program with Integrated Circuits Emphasis por sus siglas en inglés) provee un conjunto limitado de modelos de circuito y una capacidad limitada para agregar nuevos modelos a nivel de sistema electrónico [8]. En contraste, las herramientas EDA (Electronic Design Automation por sus siglas en inglés) basadas en relaciones de comportamiento proveen un vasto conjunto de posibilidades para describir eficientemente un amplio rango de modelos. Los modelos que se basan en un conjunto de ecuaciones matemáticas para describir el comportamiento de circuitos analógicos son llamados Modelos Comportamentales Analógicos (MCAs). Un MCA es similar a un subcircuito en SPICE, en el sentido de que ambos son manejados como una caja negra que se conecta al resto del circuito a través de puertos eléctricos. La diferencia principal radica en que la estructura interna de un subcircuito en SPICE se define al utilizar los componentes electrónicos primitivos tales como resistores, capacitores, transistores, etc., mientras que la estructura interna de un MCA es definida al utilizar únicamente relaciones matemáticas sin relación alguna a un componente electrónico en particular.

Finalmente, la síntesis de circuitos analógicos puede ser desarrollada, si se utilizan MCA's para simular el rendimiento del sistema caótico. Tal proceso se desarrolla y demuestra en este artículo.

## 2 MCA del circuito de Chua

El circuito de Chua es el circuito generador de caos ampliamente estudiado por la comunidad científica. Está compuesto por cinco elementos: un resistor lineal, dos capacitores, un inductor y el elemento principal, un resistor no-lineal conocido como Diodo de Chua. El circuito de Chua se modela, en este artículo, aplicando la aproximación de variables de estado [8]. De esta manera, el MCA de la Figura 1 consiste de tres ecuaciones, una para cada una de las variables de estado como se muestra en las ecuaciones (1) a (3).

$i_{NR}$  en la ecuación (1), describe la corriente a través del diodo de Chua. La idea principal es transformar el problema de solucionar un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales en una secuencia de ecuaciones puramente algebraicas, el cual se soluciona directamente al aplicar una simulación numérica. Paralelamente, el diodo de Chua se modela por una función I-V lineal a tramos como se indica en la Figura 2. Como se observa, para señales de voltaje en valor absoluto menores que el punto de ruptura (BP1) la función tiene un segmento lineal con pendiente negativa  $g_1$ . Para valores absolutos de voltajes mayores que BP1 la función tiene dos segmentos lineales de pendiente negativa  $g_2$ . El comportamiento lineal a tramos negativo es válido únicamente en el rango nominal de  $-BP2$  a  $BP2$ , en el cual el diodo es normalmente operado. Para voltajes por fuera de este rango, la pendiente de la función I-V lineal a tramos se incrementa monótonicamente hasta que la pendiente es positiva de valor  $g_3$  y debido a esto, este segmento no se involucra en las ecuaciones que describen el comportamiento del diodo de Chua. De esta manera  $i_{NR}$  tiene la forma general mostrada en la ecuación (4).

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = -\frac{V_{C1}}{RC_1} + \frac{V_{C2}}{RC_1} - \frac{i_{NR}}{C_1} \quad (1)$$

$$\frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{V_{C1}}{RC_2} - \frac{V_{C2}}{RC_2} - \frac{i_L}{C_2} \quad (2)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{V_{C2}}{L} \quad (3)$$

$$i_{NR} = \begin{cases} -g_2 V_{C1} + (g_1 - g_2)BP1 & V_{C1} < -BP1 \\ -g_1 V_{C1} & -BP1 \leq V_{C1} \leq BP1 \\ -g_2 V_{C1} + (g_2 - g_1)BP1 & V_{C1} > BP1 \end{cases} \quad (4)$$

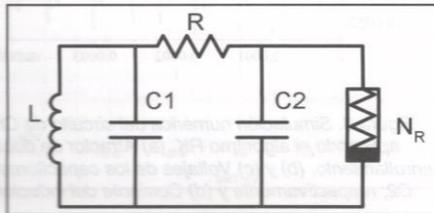


Figura 1. Circuito de Chua.

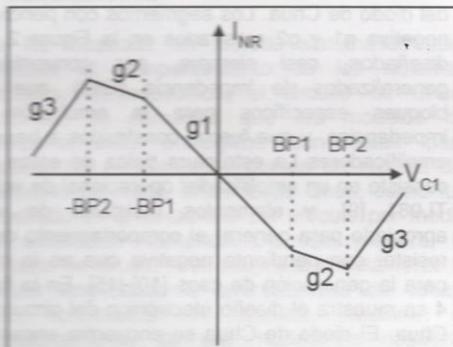


Figura 2. Regiones de operación de la función I-V lineal a tramos del diodo de Chua definido como  $N_R$  en la Figura 1.

Las ecuaciones (1) a (4) generan tres sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden como se muestra en las ecuaciones (5) a (7).

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} + \frac{g_2}{C_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (g_2 - g_1)BP1 \\ C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$V_{C1} < -BP1$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} + \frac{g_1}{C_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \\ I_L \end{bmatrix} \quad (6)$$

$-BP1 \leq V_{C1} \leq BP1$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} + \frac{g_2}{C_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (g_1 - g_2)BP1 \\ C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$V_{C1} > BP1$

### 3. Simulación numérica del circuito de Chua

La simulación numérica de las ecuaciones (5) a (7) se realiza utilizando el método de diferencias finitas Runge-Kutta (RK). El método RK explícito de cuarto orden es el más utilizado porque permite emplear grandes pasos de integración, además de su alta precisión [8]. La ecuación (8) muestra el método RK, donde las variables  $k$  son evaluadas por la ecuación (9).  $A$  y  $B$  son las matrices de estados tomadas de las ecuaciones (5) a (7),  $h$  y  $X_n$  son el incremento en el tiempo y el vector de condiciones iniciales, respectivamente. De esta manera, un problema altamente no-lineal en tiempo continuo se transformó en un problema lineal en tiempo discreto.

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (8)$$

$$k_1 = h[Ax_n + b]$$

$$k_2 = h \left[ A \left( x_n + \frac{1}{2}k_1 \right) + b \right] \quad (9)$$

$$k_3 = h \left[ A \left( x_n + \frac{1}{2}k_2 \right) + b \right]$$

$$k_4 = h[Ax_n + k_3 + b]$$

Seleccionando valores de  $C_1=450\text{pF}$ ,  $C_2=1.5\text{nF}$ ,  $L=1\text{mH}$ ,  $R=1620$ ,  $g_1=1/1358$ ,  $g_2=1/2464$ ,  $g_3=1/1600$ ,  $BP1=0.114\text{V}$ ,  $BP2=0.4\text{V}$ ,  $h=0.0000001$ ,  $VC1(0)=0.01\text{V}$ ,  $VC2(0)=0\text{V}$  and  $IL(0)=0\text{A}$  en las ecuaciones (5) a (9) se obtiene la

simulación numérica del circuito de Chua. La Figura 3 muestra los resultados de simulación y la generación de un atractor caótico denominado "doble-enrollamiento". La generación del comportamiento caótico está estrechamente relacionada con el valor del resistor R. Por otro lado, la simulación del circuito de Chua a nivel transistor utilizando SPICE es un proceso lento; sin embargo, la simulación numérica acelera el tiempo de simulación en el sentido que permite utilizar MCAs para describir sistemas no-lineales en contraste con los modelos complejos del transistor que SPICE utiliza [1]-[2].

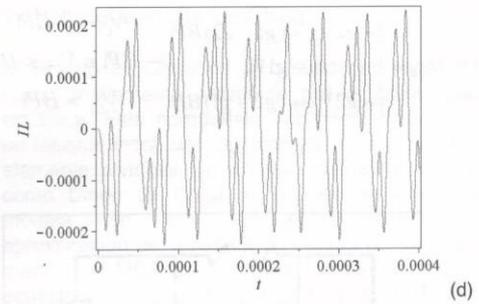
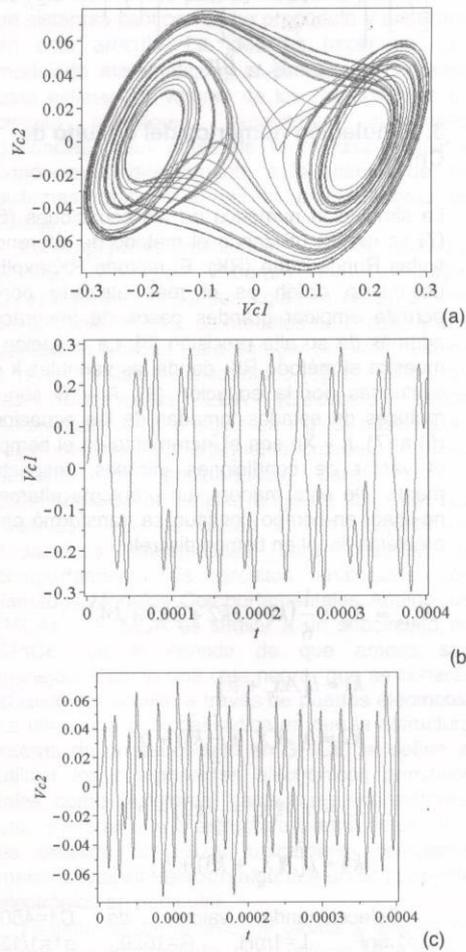


Figura 3. Simulación numérica del circuito de Chua aplicando el algoritmo RK. (a) Atractor de doble enrollamiento, (b) y (c) Voltajes de los capacitores C1 y C2, respectivamente y (d) Corriente del inductor L.

#### 4 Síntesis del diodo de Chua

En esta sección se describe la síntesis de circuito del diodo de Chua. Los segmentos con pendiente negativa  $g_1$  y  $g_2$  mostrados en la Figura 2 son diseñados, casi siempre, por convertidores generalizados de impedancia (GIC), que son bloques específicos para la emulación de impedancias, y que fueron construidos a base de amplificadores. La estructura típica de estos GIC consiste en un amplificador operacional de voltaje TL081 [9], y elementos resistivos de valor apropiado para generar el comportamiento de un resistor con pendiente negativa que es la clave para la generación de caos [10]-[15]. En la figura 4 se muestra el diseño electrónico del circuito de Chua. El diodo de Chua se encuentra encerrado en el recuadro de líneas punteadas. Como se observa de esta figura, se utilizaron dos GIC conectados en cascada, uno para realizar la pendiente negativa  $g_1$  y el otro para la pendiente negativa  $g_2$ . En la Figura 5 se muestran los resultados de simulación SPICE del diodo de Chua.

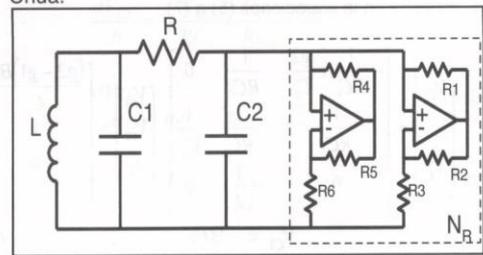


Figura 4. Síntesis del circuito de Chua.

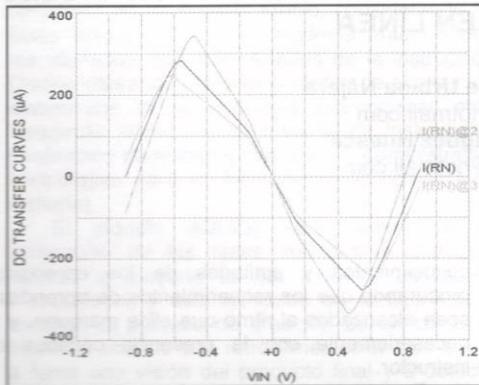


Figura 5. Simulaciones SPICE del diodo de Chua utilizando GICs.

## 5 Conclusiones

Se ha mostrado un método sistemático para explorar el comportamiento de los sistemas caóticos, en específico, el circuito de Chua. Además, se demostró que los modelos de comportamiento analógicos son útiles para estimar las pendientes y puntos de ruptura del elemento no-lineal, el diodo de Chua, como fue mostrado en el desarrollo del artículo por medio de simulación numérica. De esta manera, la síntesis de circuitos fue realizada directamente al utilizar amplificadores operacionales de voltaje que, conectados en cascada, emularon el comportamiento de una resistencia negativa. Finalmente, los modelos de comportamiento analógico nos condujeron a una respuesta favorable cuando ejecutamos simulaciones SPICE, porque facilitarán la realización de experimentos en un trabajo a futuro. Además, de que se está trabajando actualmente en un esquema de sincronización para transmitir información enmascarada con una señal portadora caótica.

## 6 REFERENCIAS

[1] Ji-Huan He, Nonlinear science as a fluctuating research frontier, *Chaos, Solitons & Fractals*, In Press, Available online 9 October 2008.

[2] J. Lu, G. Chen, Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and applications, *Int. J. Bifurcat. Chaos*, vol. 16, no. 4, pp. 775-858, 2006.

[3] C. Liu, T. Liu, L. Liu, Y. Su, A New Nonlinear Chaotic System, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 7, no.3, pp. 345-352, 2006.

[4] C. Cruz-Hernandez, A.A. Martynyuk, *Advance in chaotic dynamics with applications*, Cambridge Scientific Publishers Ltd., (2008) in press.

[5] Chuan-Kuei Huang, Shuh-Chuan Tsay and Yu-Ren Wu, Implementation of chaotic secure communication systems based on OPA circuits, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 23, no. 2, pp. 589-600, 2005.

[6] W.J. Zhou, S.M. Yu, Design and implementation of chaotic generators based on IEEE-754 standard and field programmable gate array technology, *Acta Physica Sinica*, vol. 57, no. 8, pp. 4738-4747, 2008.

[7] C. Sánchez-López, A. Castro-Hernández, A. Pérez-Trejo, Experimental Verification of the Chua's Circuit Designed with UGCs. *IEICE Electron. Express* vol. 5, no. 17, pp. 657-661, 2008.

[8] J.M. Muñoz-Pacheco, E. Tlelo-Cuautle, Synthesis of n-Scroll Attractors using Saturated Functions from High-Level Simulation, *Journal of Physics-Conference series*, vol. 96, no. 1, February 2008. DOI: 10.1088/1742-6596/96/1/012050.

[9] <http://focus.ti.com/docs/prod/folders/print/ti081.html>.

[10] Jinhu Lü, K. Muralib, Sudeshna Sinha, Henry Leung and M.A. Aziz-Alaouie, Generating multi-scroll chaotic attractors by thresholding, *Physics Letters A*, vol. 372, no. 18, pp. 3234-3239, 2008.

[11] F.Q. Wang, C.X. Liu, Generation of multi-scroll chaotic attractors via the saw-tooth function, *International Journal of Modern Physics B*, vol. 22, no. 15, pp. 2399-2405, 2008.

[12] W. Liu, W.K.S. Tang, G. Chen, 2x2-scroll attractors generated in a three-dimensional smooth autonomous system, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Volume: 17, Issue: 11, Pages: 4153-4157, 2007.

[13] R. Núñez-Pérez, Measurement of Chua chaos and its applications, *Journal of Applied Research and Technology*, vol. 6, no. 1, pp. 45-53, 2008.

[14] Behnam Ghavami, Hossein Pedram, Mehrdad Najibi, An EDA tool for implementation of low power and secure crypto-chips-*Computers & Electrical Engineering*, In Press, Corrected Proof, Available online 11 October 2008

[15] R.A. Rutenbar, G. Gielen, J. Roychowdhury, Hierarchical Modeling, Optimization, and Synthesis for System-Level Analog and RF Designs, *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no.3, pp. 640-669, 2007.