

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE PUEBLA

Programa Académico de Ingeniería en Informática



“APLICACIONES DE FILTRO KALMAN PARA SENSORES DE
PROXIMIDAD”

REPORTE TÉCNICO NUMERO

JUAN HERNÁNDEZ REYES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE PUEBLA

Programa Académico de Ingeniería en Informática



“APLICACIONES DE FILTRO KALMAN PARA SENSORES DE
PROXIMIDAD”

JUAN HERNÁNDEZ REYES

PROTOCOLO

COMITÉ EVALUADOR

DR. ANTONIO BENITEZ RUIZ

ASESOR

DR. O MC. NOMBRE COMPLETO DEL PRIMER SINODAL
SINODAL

DR. O MC. NOMBRE COMPLETO DEL SEGUNDO SINODAL
SINODAL

Índice

1. Planteamiento del problema de investigación	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Justificación	3
1.4. Objetivo general	4
1.5. Objetivos específicos	4
1.6. Cronograma de actividades	4
1.7. Recursos de hardware y software	4
1.7.1. Recursos de hardware	5
1.7.2. Recursos de software	5
1.8. Alcances y limitaciones	5
2. Marco teórico	6
2.1. Robotica Móvil	6
2.2. Construcción de Mapas	8
2.2.1. Dificultades	9
2.3. Localización y Mapeo Simultaneo (SLAM)	11
2.3.1. Formulación Bayesiana del Problema SLAM	12
2.3.2. Principales Algoritmos	14

3. Implementación	21
3.1. El filtro de Kalman	21
3.2. El filtro Kalman discreto	22
3.2.1. El proceso de ser estimado	22
3.2.2. El algoritmo del filtro de Kalman discreto	25
3.3. Filtro Kalman Extendido	28
3.4. Un ejemplo: El cálculo de una constante aleatoria	28
3.4.1. El modelo del proceso	28
3.4.2. Las ecuaciones del Filtro y los Parámetros	28
3.4.3. Las simulaciones	30
4. Elementos Matematicos	33
4.1. Probabilidad y variables aleatorias	33
4.1.1. Probabilidad	33
4.1.2. Variables aleatorias	34
4.1.3. La Media y la Varianza	35
4.1.4. Distribución Normal o Gaussiana	37
4.1.5. Independencia continua y Probabilidad Condicional	39
4.1.6. Regla de Bayes	39
4.1.7. Continuo-discreto	40
4.1.8. Ruido Blanco	40
4.1.9. Estimación estocástica	41
4.1.10. Modelos Espacio - Estado	41
4.1.11. El problema de diseño observado	43
4.1.12. Medición y ruido del proceso	44

Resumen

El resumen contiene los aspectos clave del proyecto; es una evidencia de la capacidad de síntesis del autor. A través de él se promueve el interés por los resultados de la investigación. Un buen resumen es claro, conciso y ordenado; responde brevemente a las preguntas siguientes: qué se hizo, para qué se hizo (qué problema se resolvió o cuál es la aportación a una línea de investigación, así como los beneficios), cómo se desarrolló y cuáles son los resultados.

Capítulo 1

Planteamiento del problema de investigación

1.1. Introducción

Robotica

La Robótica es una disciplina que combina todas aquellas actividades relacionadas con el estudio, diseño, construcción, operación y mantención de robots.

Es un campo de trabajo que combina diferentes disciplinas como: Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Mecánica, Ciencias de la Computación, Matemáticas, Física, Biología, Neurociencias, etc.

Las Disciplinas Relacionadas con la Robotica son:

- Visión Computacional
- Inteligencia Artificial/Computacional
- Cibernética (Control + Ciencias de la Información + Biología)
- Mecatrónica (Mecánica + Electrónica + Computación)

El término robot fue introducido en 1921 por el checo Karel Capek, y viene de la combinación de las palabras checas "robota" que significa trabajo obligatorio y "robotnik" que significa siervo.

La palabra robótica fue utilizada por primera vez por el científico y escritor de ciencia ficción Isaac Asimov en 1942[8].

En la actualidad existen muchos tipos de robots: con ruedas, con patas, brazos manipuladores, con orugas, de forma humanoide, de forma cilíndrica, etc., sin embargo, la morfología no es una característica esencial, lo que identifica a cualquier robot es que combina en la misma plataforma a sensores, actuadores y procesadores.

Los sensores miden alguna característica del entorno o propia (e.g. cámaras, sensores de obstáculos, etc.). Los actuadores permiten al robot hacer algo, llevar a cabo alguna acción o simplemente desplazarse (e.g. los motores). Los procesadores hacen los cálculos necesarios y realizan el enlace lógico entre sensores y actuadores, materializando el comportamiento del robot en el entorno en el cual se encuentra inmerso[10].

Esto nos lleva a una subdivisión de los Robots, con base en su arquitectura, la cual se clasifica en los siguientes grupos: Poliarticulados, Móviles, Androides, Zoomórficos e Híbridos [1].

1.2. Antecedentes

En la Universidad Politécnica de Puebla existe un grupo de trabajo dedicado a desarrollar proyectos en el área de robótica. Desde hace un par de años se han desarrollado algunos prototipos y se han implementado algunos algoritmos para robots móviles, entre los que destacan los siguientes proyectos:

Construcción de un vehículo de tracción trasera utilizando servomotores para el cual se aplican conocimientos de robótica básica, como programación de puertos paralelos,

diseño de la interfaz, control de motores por puerto paralelo, diseño y construcción del vehículo e interfaz de comunicación, así como programación de rutinas para lograr que el vehículo realice movimientos básicos como avanzar, retroceder, girar a la derecha y girar a la izquierda[6]. Este proyecto fue el inicio de la construcción de un vehículo controlado a través del puerto serial, incorporando la programación de comportamientos básicos de desplazamiento.

Posteriormente, se desarrolló sobre este mismo proyecto la programación de rutinas de movimiento a través de la incorporación de un microcontrolador, para el cual se diseñó e implementó su etapa de potencia, se describe la programación de un PIC que almacena comportamientos básicos de evasión de obstáculos para un robot tipo vehículo a través de la entrada de señales enviadas por un sensor de proximidad. El programa para el PIC está codificado en ensamblador. Así mismo, se propone el diseño de una tarjeta de control para realizar la comunicación entre PIC - Sensor y PIC - Tarjeta de control de motores[4]. Teniendo el control de movimiento para este robot, se implementó por software un control de localización para este mismo robot[9].

Estos proyectos proveen de experiencia al grupo para poder abordar retos mayores en la programación de robots móviles.

1.3. Justificación

Proporcionar a la Universidad Politécnica en el área de Robótica una aplicación del Filtro Kalman para la reducción de errores en la medición de sensores de proximidad por software, lo cual permitiría tener un mejor control y precisión al utilizar robots móviles en cualquier aplicación.

1.4. Objetivo general

Simulación del Filtro Kalman para la reducción de errores de medición en sensores de proximidad.

1.5. Objetivos específicos

- Analizar y describir el Filtro Kalman Discreto y Filtro Kalman Extendido.
- Implementación y simulación de Filtro Kalman Discreto para sensores de proximidad infrarrojos y ultrasonicos.
- Implementación y simulación de Filtro Kalman Extendido para sensores de proximidad infrarrojos y ultrasonicos.

1.6. Cronograma de actividades

Tabla 1.1: Cronograma de actividades por semana

Actividades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Marco Teorico	*	*	*	*								
Diseño e implementación					*	*	*	*				
Pruebas y Resultados									*	*	*	*
Redacción del Documento	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

1.7. Recursos de hardware y software

Para el desarrollo de este proyecto, se requieren los recursos siguientes:

1.7.1. Recursos de hardware

- Memoria RAM 2G
- Procesador Pentium 3
- Disco duro de 80Gb
- Sensores de proximidad

1.7.2. Recursos de software

- Dev C++

1.8. Alcances y limitaciones

- Desarrollar un metodo de SLAM para poder programar el Pololu 3pi y hacer pruebas sobre el desempeño del robot en distintos ambientes.
- Implementar un control odometrico por software para el Pololu 3pi, ya que no cuenta con esta funcionalidad.
- Calibrar y programar el uso de los sensores de proximidad.
- Una limitación es que generalmente este tipo de algoritmos se desempeñan bien bajo un contexto teórico o simulado.
- Una segunda limitación es que su implementación en un robot, presenta dificultades físicas, a las cuales se les deberá ir haciendo las adecuaciones pertinentes.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Robotica Móvil

Los robots son sistemas complejos difíciles de desarrollar. Integran múltiples sensores y actuadores, tienen muchos grados de libertad (articulaciones) y deben reconciliar tareas de tiempo real con sistemas que no pueden cumplir con los tiempos de entrega. Los diseñadores de sistemas han tratado típicamente con arquitecturas para guiar la construcción de robots proporcionando servicios computacionales a los subsistemas y componentes [5].

La robótica móvil estudia a los robots que realizan tareas desplazándose autónomamente en ambientes dinámicos y complejos, es decir, desde espacios interiores como oficinas y casas, hasta exteriores como espacios terrestres, submarinos y sustentados sobre el aire.

Estas habilidades llevan implícita la capacidad de razonar sobre una representación interna del mundo. Así se define a un robot móvil como un dispositivo formado por componentes físicos y computacionales, divididos en cuatro subsistemas [CITA]:

- Locomoción
- Percepción

- Razonamiento
- Comunicación

Los robots móviles cuentan con gran capacidad de desplazamiento, basados en carros o plataformas y dotados de un sistema locomotor de tipo rodante. Siguen su camino por telemando o guiándose por la información recibida de su entorno a través de sus sensores.

En un principio tortugas motorizadas diseñadas en los años cincuenta, fueron las precursoras y sirvieron de base a los estudios sobre inteligencia artificial desarrollados entre 1965 y 1973 en la Universidad de Stanford.

Estos robots aseguran el transporte de piezas de un punto a otro de una cadena de fabricación. Guiados mediante pistas materializadas a través de la radiación electromagnética de circuitos empotrados en el suelo, o a través de bandas detectadas fotoeléctricamente, pueden incluso llegar a sortear obstáculos y están dotados de un nivel relativamente elevado de inteligencia [3].

En los últimos años la investigación sobre robots móviles está adquiriendo gran desarrollo. Ello se debe, en parte, al abaratamiento del hardware necesario para su construcción, y en parte a la nueva concepción industrial de planta de fabricación flexible, que requiere la reconfiguración de la secuencia de acciones necesarias para una producción variada, lo que a su vez exige facilidad de desplazamiento de los materiales entre cualesquiera puntos de la industria [12]

Los robots móviles están provistos de patas, ruedas u orugas que los capacitan para desplazarse de acuerdo a su programación. Elaboran la información que reciben a través de sus propios sistemas de sensores y se emplean en determinado tipo de instalaciones industriales, sobre todo para el transporte de mercancías en cadenas de producción y almacenes. También se utilizan robots de este tipo para la investigación en lugares

de difícil acceso o muy distantes, como es el caso de la exploración espacial y de las investigaciones o rescates submarinos [2].

2.2. Construcción de Mapas

La construcción de un mapa del entorno mediante un robot móvil es uno de los tópicos de investigación más importantes dentro de la robótica móvil y la inteligencia artificial desde hace dos décadas y es un problema complejo debido a su naturaleza. La capacidad de un robot móvil para construir un mapa de su entorno se considera que es fundamental para conseguir una total autonomía. Es por eso que existen numerosos trabajos dentro de esta área con este objetivo[CITA].

Para adquirir el mapa de un entorno, el robot móvil debe disponer de sensores que le permitan percibir los objetos del mundo que le rodea. Entre estos sensores se pueden citar; los sonares o ultrasonidos, infrarrojos, escáneres láser, cámaras mono o estéreo y sensores de contacto. Todos estos sensores presentan como característica fundamental la existencia de ruido en sus medidas, medidas que son referenciadas relativamente a la posición (en la que se incluye la orientación) del robot. Es importante resaltar esta característica, ya que el hecho de que el entorno no sea observable de manera global es el origen de la dificultad del problema.

Existe otro tipo de sensores que permiten al robot medir su estado referenciado a un sistema de coordenadas global, de forma total o parcial, como son el *Global Positioning System* (GPS) y las brújulas. Sin embargo estos sensores externos no suelen funcionar bien en interiores y en presencia de ruidos magnéticos (como los provocados por corrientes eléctricas y aparatos muy comunes en los entornos de interiores con personas), por lo que no son muy utilizados en aplicaciones de interiores. Además, se considera especialmente interesante el caso de que el robot no tenga ninguna información abso-

luta de su estado, por lo que aun siendo factible su utilización, muchos investigadores abordan el problema de la construcción del mapa sin su ayuda.

En un proceso típico de construcción del mapa de un entorno, se inicia con un mapa vacío o desconocido en el que el robot parte de una posición conocida (coordenadas); comienza el proceso, y el robot es capaz de construir la parte del mapa cercana a su posición, pero debido al limitado rango de los sensores, el robot debe moverse hacia las zonas que quieran ser incluidas en el mapa.

Según se va desplazando hacia esas nuevas áreas, observa los objetos presentes en ellas y va actualizando el mapa del entorno. El ruido de las medidas hace que el mapa no sea exacto, pero a su vez el robot se mueve con desplazamientos de los que sólo se tiene una estimación, con lo que su posición tampoco es exacta.

El procesamiento del mapa del entorno se puede realizar después de la adquisición y almacenamiento de los datos sensoriales, con lo que el tiempo de procesamiento no es crítico, o se puede realizar incrementalmente, es decir a medida que llegan los datos de los sensores. Si se desea que sea de manera incremental, se requiere que el tiempo de procesamiento empleado en la actualización del mapa con la llegada de cada información sensorial, sea inferior al periodo de muestreo de dichos sensores, si no se desea incurrir en pérdida de información.

2.2.1. Dificultades

Sea cual sea el método o algoritmo empleado las principales dificultades encontradas se pueden resumir en los siguientes puntos [7]:

- **Naturaleza y origen de los errores.** El problema de la construcción de mapas es el hecho de que de las observaciones hechas por el robot son relativas al propio robot, y como el sistema de movimiento es inexacto, la posición del robot

está caracterizada por una incertidumbre intrínseca. En el caso de que el robot no tuviera ruido en el movimiento, la construcción del mapa sería muy sencilla ya que éste sería globalmente observable, y bastaría realizar constantemente nuevas medidas para disminuir la incertidumbre del mapa y obtener cada vez un mapa más preciso.

- **Tamaño de los entornos.** En entornos sencillos como ambientes domésticos o de pequeñas oficinas, el tamaño del mapa a construir sea muy limitado. Sin embargo, el sistema tiene que ser capaz de construir igualmente los mapas de entornos más grandes como museos, almacenes, edificios públicos, etc., cuyo tamaño supone un gran problema, ya que el costo computacional de los algoritmos de construcción de mapas se incrementa con el tamaño del mismo.
- **Los entornos son dinámicos.** La mayoría de los algoritmos existentes se basan en la denominada hipótesis de Markov[CITAR]: el único estado del mundo es el que se está estimando. Es una simplificación común la suposición de que el entorno es estático, y por lo tanto el estado de los objetos consta únicamente de su posición. Se puede apreciar que esta suposición en un entorno con personas, vulnera claramente la hipótesis anterior.
- **El problema de la correspondencia o asociación de datos.** Si los objetos de un mapa no son diferenciables unos de otros por sus cualidades intrínsecas, la asociación de datos no se puede realizar determinísticamente, y sólo una estimación probabilista de dicha asociación puede ser formulada.

2.3. Localización y Mapeo Simultaneo (SLAM)

El SLAM es un proceso en el que un robot móvil puede construir un mapa de su entorno y al mismo tiempo usar ese mapa para aproximar su localización. En SLAM, la trayectoria del robot y las posiciones de los puntos de referencia están estimadas en línea sin la necesidad de un conocimiento previo de la localización.

El esquema general del problema del SLAM consta de cuatro pasos[referenciar]:

1. Adquirir la información sensorial.
2. Detectar los puntos de referencia marcados para identificar los puntos de interés del entorno.
3. Establecer correspondencias entre lo observado y lo esperado. Esto asume analizar lo observado con respecto a una base de datos o unos criterios bien definidos de comparación para poder discernir qué es lo que está percibiendo el robot.
4. Cálculo de la posición. Gracias a la comparación realizada se puede hacer el cálculo de la posición del robot.

El problema de localización y mapeo simultáneo, propone si es posible para un robot móvil situarse en una posición desconocida dentro de un sistema también desconocido y construir de forma incremental un mapa del entorno mientras simultáneamente determina su posición utilizando el mapa.

La mayoría de los algoritmos existentes en la literatura basan su solución al problema SLAM en base a técnicas probabilísticas, y son este tipo de algoritmos los que alcanzan sin duda los mejores resultados. Por lo que cualquier solución al problema SLAM que utilice estas técnicas está fundamentada en el teorema de Bayes[referenciar].

2.3.1. Formulación Bayesiana del Problema SLAM

Todos los algoritmos relevantes existentes representan la posición del robot como el entorno probabilísticamente, y utilizan la inferencia probabilística como herramienta para transformar las medidas obtenidas en un mapa (también probabilístico) del entorno. La incertidumbre de los sensores y modelos del sistema deriva naturalmente en una formulación basada en técnicas probabilísticas, por lo que el planteamiento del problema desde esta perspectiva es el más adecuado a su naturaleza, y es por ello por lo que la solución probabilística es la más extendida.

La base conceptual y matemática explícita o implícitamente en cualquier sistema que aborde el problema SLAM desde la perspectiva probabilística, es el teorema de Bayes. En un robot móvil construyendo un mapa se pueden distinguir dos tipos de datos: las medidas propioceptivas [definir] del movimiento del robot y las medidas de los sensores externos. Se puede asumir sin pérdida de generalidad, que dichas medidas llegan secuencial y alternativamente en el tiempo:

$$v_1, z_1, v_2, z_2, \dots, v_t, z_t, \quad (2.1)$$

Donde la v representa un desplazamiento relativo del robot y la z una medida sensorial, y cuyos subíndices representan el instante de tiempo en el que fueron obtenidas, siendo el tiempo t el instante actual. El estado del sistema x_t en el instante de tiempo t estará compuesto típicamente por la posición del robot s_t y la posición de cada uno de los objetos del mapa

$$x_t \triangleq s_t, m_t, \quad (2.2)$$

El teorema de Bayes permite escribir la probabilidad de dicho estado condicionada al conjunto de todos los datos recogidos hasta ese instante t $p(x_t|z_t, u_t)$ como expresa

la ecuación 2.3. Es importante resaltar que esta función de probabilidad, representa cualquier solución probabilista al problema SLAM.

$$p(x_t|z^t, u^t) = p(s_t, m_t|z^t, u^t) = \eta p(z_t|s_t, m_t, z^{t-1}, u^t) p(s_t, m_t|z^{t-1}, u^t) \quad (2.3)$$

Donde el superíndice 't' responde a la agrupación de todos los datos respectivos desde el inicio hasta el instante t , y η es el factor de normalización de la función de probabilidad.

$$z^t = z_1, z_2, \dots, z_t \quad u^t = u_1, u_2, \dots, u_t \quad (2.4)$$

Si se considera que el único estado que existe es el representado por $s_t \ m_t$ (hipótesis de Markov), la ecuación anterior se puede escribir como:

$$p(s_t, m_t|z^t, u^t) = \eta p(z_t|s_t, m_t, z^{t-1}, u^t) \quad (2.5)$$

La ley de probabilidad total permite expresar el segundo factor del término de la derecha de la siguiente manera:

$$p(s_t, m_t|z^{t-1}, u^t) = \int \int p(s_t, m_t|z^{t-1}, u^t, s_{t-1}, m_{t-1}) p(s_{t-1}, m_{t-1}|z^{t-1}, u^t) ds_{t-1} dm_{t-1} \quad (2.6)$$

Y la reutilización de la hipótesis de Markov y la hipótesis (más que razonable) de que el movimiento del robot es independiente del mapa lleva a:

$$p(s_t, m_t|z^{t-1}, u^t) = \int p(s_t|u^{t-1}) p(s_{t-1}, m|z^{t-1}, u^t) ds_{t-1} \quad (2.7)$$

Se puede expresar entonces:

$$p(s_t, m|z^t, u^t) = \eta p(z_t|s_t, m_t) \int p(s_t|u^t, s_{t-1}) p(s_{t-1}, m|z^{t-1}, u^{t-1}) ds_{t-1} \quad (2.8)$$

El problema así formulado puede ser abordado recursivamente, necesitando en cada instante de tiempo únicamente los datos sensoriales (con su probabilidad) obtenidos en ese instante y la función de probabilidad del estado en el instante anterior. Es esta expresión anterior (ecuación 2.8) la que recibe el nombre de *Filtro de Bayes* en el problema SLAM. Para que esta expresión pueda ser evaluada se requieren dos modelos o funciones de probabilidad denominadas generativas, y que corresponden a la información (con su probabilidad) tanto del sistema odométrico como del sistema de percepción externo. Estas dos funciones suelen ser invariantes en el tiempo y por tanto no suelen depender de la variable t .

Modelo de medida $p(z_t | s_t, m_t)$

Modelo de movimiento $p(s_t | u_t, s_{t-1})$

El principal problema es que la ecuación del Filtro de Bayes no puede ser resuelta ni implementada en su forma general. Por lo tanto es necesaria la realización de simplificaciones, suposiciones o hipótesis añadidas para su solución.

2.3.2. Principales Algoritmos

a) Filtro extendido de Kalman

Una de las soluciones a la ecuación del Filtro de Bayes más extendida es la basada en el Filtro de Kalman. El EKF se puede derivar de la suposición de que la probabilidad del estado $p(s_t, m_t | z_t, u_t)$ se puede modelar por una distribución de probabilidad unimodal gaussiana multidimensional, caracterizada por su valor esperado (media) y su matriz de varianzas y covarianzas (en lo sucesivo matriz de covarianza)[referenciar]:

$$x_t = s_t, m_t \iff \vec{x}(k)$$

$$\vec{x}(k) \sim N(\hat{\vec{x}}(k|k), P(k|k))$$

Donde

$$\hat{\vec{x}}(k|k) = E(\vec{x}(k))$$

$$P(k|k) = E[(\vec{x}(k) - \hat{\vec{x}}(k|k))(\vec{x}(k) - \hat{\vec{x}}(k|k))^T]$$

Por la propia naturaleza del EKF, esta solución requiere el uso de un mapa métrico geométrico[referenciar], basado en elementos discretos con características geométricas para poder ser parametrizados en el vector de estado a estimar por el algoritmo.

El EKF tiene como ventaja que es capaz de mantener la estimación a posteriori completa de forma incremental, a costa de realizar la suposición de que tanto el ruido del sistema de movimiento (odometría) como del sistema sensorial pueden ser aproximados por una distribución normal.

El EKF requiere para el cálculo de su matriz de covarianzas que los modelos de movimiento y de medida, que no son lineales, sean previamente linealizados. Generalmente se supone que esta linealización es aceptable, y que los errores cometidos son pequeños, lo que es asumido por las implementaciones existentes.

Las principales desventajas de este algoritmo son las siguientes:

- El coste computacional crece al cuadrado con el número 'n' de objetos del mapa siendo $O(n^2)$, así que no puede ser aplicado para mapas arbitrariamente grandes.
- La asociación de datos no queda resuelta por el algoritmo, esta asociación debe ser realizada en el instante en el que se realizan las medidas, con la estimación del mapa disponible en ese momento, por lo que la correspondencia puede llegar a ser bastante incierta.

- La hipótesis de distribución gaussiana no es capaz de acomodar observaciones ambiguas y tampoco responde correctamente a las no linealidades de los modelos.

b) Mapa de ocupación de celdillas

Este algoritmo se basa en la discretización del entorno en una rejilla bidimensional, en la que cada celdilla mantiene el valor de la probabilidad de estar ocupada. Para la construcción de un mapa OG [Definir] es necesaria la hipótesis de que las posiciones del robot son conocidas, lo que es conocido como el problema de construcción de mapas con posiciones conocidas. Estas posiciones son normalmente estimadas con un algoritmo de localización local, con la suposición de que el error cometido en el movimiento del robot (odometría) es pequeño. A partir de esta posición se resuelve el problema de decidir a partir de las medidas con ruido de los sensores (sonares o láser) qué celdillas de la rejilla están libres u ocupadas.

Este algoritmo tiene como ventajas que es muy robusto, que no hace suposiciones acerca de la geometría del mundo, que puede ser aplicado incrementalmente y que su implementación es sencilla. También es importante su capacidad de modelar no solo las zonas ocupadas, sino de distinguir las zonas que han sido exploradas y están libres de objetos, de las zonas que no han sido exploradas. Es por este motivo que su popularidad es enorme para tareas de navegación, en especial para planificación de trayectorias.

Su principal desventaja es, que no tiene en cuenta la incertidumbre de la posición del robot, sino que requiere el conocimiento de su posición, por lo que no es considerada como una solución completa al problema SLAM, sino únicamente como una solución parcial. Su capacidad para cerrar bucles correctamente es teóricamente escasa, aunque depende del algoritmo utilizado para la corrección de la

posición del robot.

c) Máxima Probabilidad Incremental

La idea básica de este algoritmo consiste en construir un único mapa a medida que llegan los datos, pero sin mantener una noción de la incertidumbre del mismo o de la posición del robot. Simplemente se mantienen el mapa y la posición del robot más probable en cada instante, que se pueden obtener según [11] mediante la siguiente maximización:

$$s_t^*, m_t^* = \arg_{s_t, m_t} \max (z_t | s_t, m_t) p(s_t, m_t | u_t, s_{t-1}^*, m_{t-1}^*) \quad (2.9)$$

Esta maximización se suele limitar al cálculo de la posición del robot más probable entre el conjunto de posiciones posibles, cada vez que llega una información sensorial, lo que hace factible un tiempo de procesamiento muy limitado.

Este algoritmo puede ser por lo tanto aplicado incrementalmente, pero sin embargo y dado que no almacena la información de incertidumbre de ninguna forma, su capacidad para cerrar bucles correctamente es nula como se muestra es nula ya que la información que llega en cada iteración se congela después de la maximización y ya no puede ser modificada de ninguna forma mediante datos posteriores. Así, aunque la estimación local obtenida es relativamente correcta, la estimación después de cerrar un bucle puede degenerar totalmente.

d) Algoritmos híbridos

Para solucionar las limitaciones del algoritmo de Máxima Probabilidad Incremental, surgen una serie de algoritmos híbridos que plantean una solución intermedia entre la obtención de el mapa más probable (Máxima Probabilidad Incremental), que prescinde de toda noción de incertidumbre, y la estimación de la función de

probabilidad del mapa completo (EKF), que mantiene la información de incertidumbre de modo completo. Estas soluciones mantienen la incertidumbre de la posición del robot de uno u otro método, y realizan la estimación del mapa más probable como respuesta a la simplificación del filtro de Bayes, correspondiente al problema de la localización con un mapa dado:

$$p(s_t|z^t, u^t) = \eta p(z_t|s_t) \int p(s_t|u_t, s_{t-1}) p(s_{t-1}|z^{t-1}, u^{t-1}) ds_{t-1} \quad (2.10)$$

En el momento en que cualquiera de los dos algoritmos encuentra la información topológica correspondiente al cerramiento de un bucle con la suficiente seguridad, calcula la corrección en la posición del robot y transmite esta corrección proporcionalmente a lo largo del bucle del mapa. Las correcciones en el mismo son por lo tanto, discretas en el tiempo y sólo en los instantes en los que se identifica esta situación.

e) Maximización de la esperanza

La aplicación del algoritmo Maximización de la Esperanza al problema SLAM, intenta encontrar el mapa más probable mediante un algoritmo recursivo (hill-climbing) sin mantener la función de probabilidad del mismo. Para poder lograr esto se necesitan todos los datos capturados a lo largo de la trayectoria del robot en el entorno y no se puede aplicar incrementalmente. Sin embargo tiene la ventaja de que es capaz de manejar intrínsecamente el problema de la asociación de datos.

Formalmente se plantea la obtención de este mapa más probable como:

Realizando las transformaciones necesarias [Thrun98b], se puede obtener la expresión equivalente cuya maximización equivale a la anterior:

$$m^* = \operatorname{argmax}_m \int \dots \int \prod_{i=1}^t p(z_i|s_i, m) \prod_{i=1}^t p(s_{i+1}|u_i, s_i) ds_1 \dots ds_t \quad (2.11)$$

Esta ecuación no se puede implementar en la práctica, por lo que se recurre al algoritmo Maximización de la Esperanza que estima el mapa más probable trepando en el espacio de probabilidad de los mapas, iterando en dos fases:

Una primera fase E (E - xpectation) en la que se obtiene el camino más probable para un mapa dado. Esta fase corresponde al problema de localización del robot en un mapa dado con todo el conjunto de datos almacenado a lo largo del experimento.

La segunda fase M (M-aximization) calcula el mapa más probable dadas las posiciones del robot calculadas en la fase E. Esta etapa se puede llevar a cabo con un algoritmo de los descritos anteriormente, como el de ocupación de celdillas. Se parte de la estimación del camino, y de un mapa vacío, así que el algoritmo itera hasta que la estimación del camino del robot y del mapa se estabiliza.

Este algoritmo resuelve el problema de la asociación de datos, realizando varias pasadas al conjunto total de datos, de tal forma que al relocalizar el robot con el mapa generado anteriormente y volver a generar el mapa, la asociación de datos puede ser distinta en cada pasada, llevando a la asociación de datos que produce el mapa más probable.

f) Solución Factorizada del Filtro de Bayes

La Factored Solution to SLAM o FastSLAM, fundamenta su formulación en la independencia condicional, que permite factorizar la función de probabilidad 2.8 del Filtro de Bayes, suponiendo la asociación de datos como establecida, según:

$$p(s_t, m | z^t, u^t) = p(s_t | z^t, u^t) \prod_{i=1}^n p(m_i | s^t, z^t, u^t) \quad (2.12)$$

Esta ecuación, que corresponde a una factorización de la probabilidad del mapa,

es exacta y aplicable siempre en las mismas condiciones que la ecuación del filtro de Bayes y no corresponde en modo alguno a una simplificación o reducción de la misma.

Una de las ventajas de este método es que es capaz de manejar las no linealidades del modelo del movimiento gracias al filtro de partículas.

Otra de las ventajas es que la asociación de datos se realiza para cada partícula, lo que permite la gestión de observaciones ambiguas de una forma mucho más robusta que en el EKF.

Esta solución, aunque aun presenta algunas carencias, sobre todo en la gestión de la representación necesaria para conseguir la reducción logarítmica, parece muy prometedora [7].

Capítulo 3

Implementación

Da ejemplos de las principales tareas que realiza el sistema desarrollado según los roles de los usuarios o la interacción del investigador con las herramientas de software utilizadas en la investigación.

3.1. El filtro de Kalman

Dentro de la caja de herramientas importantes de las herramientas matemáticas que se pueden utilizar para estimaciones estocásticas de las mediciones de ruido del sensor, una de las más conocidas y herramientas de uso frecuente es lo que se conoce como el filtro de Kalman. El filtro de Kalman es el nombre después de Rudolph E. Kalman, quien en 1960 publicó su famoso artículo que describe una solución recursiva al problema de filtración datos discretos lineales (Kalman 1960). Desde el momento de su introducción, el filtro de Kalman ha sido objeto de una amplia investigación y aplicación, particularmente en el área de navegación autónoma o asistida. Es probable que esto debido en gran parte a los avances en la computación digital que permite el uso de la práctica del filtro, sino también a la relativa simplicidad y robustez del filtro en sí mismo. Rara vez las condiciones necesarias para la optimalidad existen realmente,

y sin embargo, al parecer, el filtro funciona bien para muchas aplicaciones, a pesar de esta situación.

3.2. El filtro Kalman discreto

Esta sección describe el filtro en su formulación original (Kalman 1960) donde el las mediciones se producen y el estado se estima en puntos discretos en el tiempo.

3.2.1. El proceso de ser estimado

El filtro Kalman aborda el problema general de tratar de estimar el estado $x \in \mathfrak{R}^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto que se rige por la ecuación de diferencia estocástica lineal

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1} \quad (3.1)$$

con una medición $z \in \mathfrak{R}^m$ que es

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (3.2)$$

Las variables aleatorias w_k y v_k representan el proceso y la medición del ruido (Respectivamente). Que se supone que son independientes (entre sí), y con distribuciones de probabilidad normal

$$p(w) \sim N(0, Q), \quad (3.3)$$

$$p(v) \sim N(0, R). \quad (3.4)$$

En la práctica, las *matrices de covarianza de ruido del proceso* \mathbf{Q} y la *covarianza de ruido de la medición* \mathbf{R} pueden cambiar con cada paso de tiempo o de medición, sin embargo aquí se asume son constantes.

La matriz A de $n \times n$ en la ecuación diferencial (3.1) se refiere al estado en el paso de tiempo anterior $k - 1$ al estado en el paso actual k , en la ausencia de cualquier función de manejo o el ruido del proceso. Tenga en cuenta que en la práctica A podría cambiar con cada paso de tiempo, pero aquí se asume que es constante. La matriz B de $n \times l$ se relaciona la entrada de control opcional $u \in \mathfrak{R}^l$ al estado x . La matriz H de $m \times n$ en la ecuación de medición (3.2) se relaciona con el estado de la medición z_k . En la práctica H podría cambiar con cada paso de tiempo o medición, pero en este caso suponemos que es constante.

Definimos $\hat{x}_k^- \in \mathfrak{R}^n$ (nótese el "super menos") a nuestro estado estimado a *priori* en el paso k dado el conocimiento del proceso antes de la etapa k , y $\hat{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ nuestro estado estimado *posteriori* en el paso k dada la medición z_k . Podemos definir entonces un a *priori* y un *posteriori* cálculo del error como

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-, \text{ y}$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k$$

La covarianza de error estimada a *priori* es entonces

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}], \quad (3.5)$$

y una estimación a *posteriori* de covarianza de error

$$P_k = E[e_k e_k^T]. \quad (3.6)$$

En la obtención de las ecuaciones para el filtro de Kalman, comenzamos con el objetivo de encontrar una ecuación que calcula una estimación del estado a *posteriori* \hat{x}_k como una combinación lineal de una estimación a *priori* \hat{x}_k^- y una diferencia de

peso entre una medida real z_k y una medición de predicción $H\hat{x}_k^-$, como se muestra a continuación en la ecuación (3.7).

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (3.7)$$

La diferencia $(z_k - H\hat{x}_k^-)$ en la ecuación (3.7) se llama la medida de *innovación*, o *residuo*. El residuo refleja la discrepancia entre la medida prevista $H\hat{x}_k^-$ y la medición real $z - k$. Un residuo de cero significa que los dos están en completamente de acuerdo.

La matriz K de $n \times m$ en la ecuación (3.7) es elegida para ser la *ganancia* o el *factor de mezcla* que minimiza la covarianza de error a *posteriori* ecuación (3.6). Esta reducción puede ser realizado primero sustituyendo la ecuación (3.7) en la definición anterior para e_k , sustituyéndola en la ecuación (3.6), realizando las expectativas indicadas, tomando la derivación del seguimiento de los resultados con respecto a K , estableciendo ese resultado igual a cero, y entonces resolviendo para K . Una forma como resultado de K que minimiza la ecuación (3.6) esta dada por

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \\ &= \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R} \end{aligned} \quad (3.8)$$

En cuanto a la ecuación (3.8) vemos que a medida que la covarianza de error de medición R se aproxima a cero, la ganancia de peso K es residual en gran medida. Específicamente,

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1}$$

Por otro lado, como la covarianza de error estimada a priori P_k^- se aproxima a cero, el residuo del peso de la ganancia K es menor al exceso. Específicamente,

$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0$$

Otra forma de pensar acerca de la ponderación de K es que como la covarianza del error de medición R se aproxima a cero, la medida real z_k es "de confiar" más y más, mientras que la medida prevista $H\hat{x}_k^-$ es cada vez menos de confiar. Por otro lado, como la covarianza del error estimado a priori P_k^- se aproxima a cero la medición real z_k cada vez es menos de confiar, mientras que la medida prevista $H\hat{x}_k^-$ es cada vez más de confiar.

3.2.2. El algoritmo del filtro de Kalman discreto

El filtro de Kalman estima un proceso mediante el uso de una forma de control de retroalimentación: el filtro estima el estado del proceso en algún momento y luego obtiene la retroalimentación en forma de (ruido) mediciones. Por lo tanto, las ecuaciones del filtro Kalman caen en dos grupos: las ecuaciones de *actualización del tiempo* y las ecuaciones de *actualización de la medición*. Las ecuaciones de actualización de tiempo son responsables de proyectar hacia adelante (en el tiempo) el estado actual y la estimación de la covarianza estimada para obtener el próximo paso del tiempo estimado a priori. Las ecuaciones de actualización de la medición son responsables de la retroalimentación P/E la incorporación de una nueva medición en una estimación a priori para obtener una mejor una estimación a posteriori.

Las ecuaciones de actualización de tiempo, también se pueden considerar como las ecuaciones de *predicción*, mientras que las ecuaciones de actualización de la medición pueden ser consideradas como ecuaciones de *corrección*. De hecho, la última estimación del algoritmo es similar a la de un algoritmo *predictor-corrector* para la resolución de problemas numéricos como se muestra en la Figura 3.1.

Las ecuaciones específicas para el tiempo y la actualización de la medición son



Figura 3.1: Traducir el pie de imagen

presentadas a continuación en la tabla cuadro 3.1 y 3.2.

Tabla 3.1: Ecuaciones de actualización de Tiempo Filtro de Kalman Discreto

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (3.9)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (3.10)$$

Una vez más cuenta de cómo las ecuaciones de actualización del tiempo en la tabla 3.1 de las estimaciones de la covarianza y el estado del proyecto hacia adelante del paso de tiempo $k-1$ al paso k . A y B son de la ecuación (3.1), mientras que Q es de la ecuación (3.3).

Tabla 3.1: Ecuaciones de actualización de medición Filtro de Kalman Discreto

$$K_k = P_k^- (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (3.11)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (3.12)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (3.13)$$

La primer tarea en la actualización de la medición consiste en calcular la ganancia de Kalman, K_k . Note que la ecuación dada aquí como la ecuación (3.11) es la misma que la ecuación (3.8). El siguiente paso es obtener la medición del proceso real z_k , a continuación, generar una estimación del estado a *posteriori* mediante la incorporación

de la medición como en la ecuación (3.12). La ecuación (3.12) es simplemente la ecuación (3.7) repetida aquí por completos. El paso final es obtener una estimación de covarianza del error a *posteriori* a través de la ecuación (3.13).

Después de cada tiempo y un par de actualizaciones de la medición, se repite el proceso con la anterior estimación a *posteriori* utilizada para proyectar o predecir la nueva estimación a *priori*. Esta naturaleza recursiva es una de las características más atractivas del filtro de Kalman, que hace que la prácticamente las implementaciones mucho más factible . El filtro de Kalman en lugar de forma recursiva las condiciones de la estimación actual de todos los de las mediciones anteriores. La Figura 4.2 a continuación ofrece un panorama completo de la operación del filtro, combinando el diagrama de alto nivel de la figura 4.1, con las ecuaciones de la tabla 3.1 y la tabla 3.2.

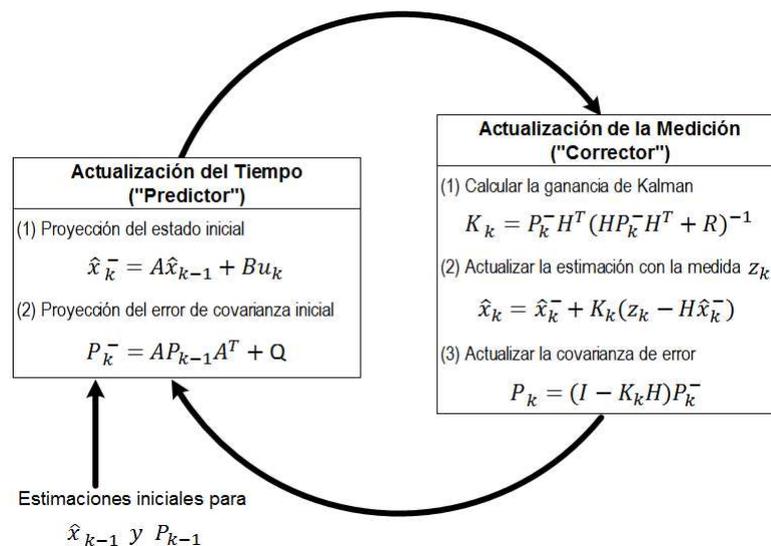


Figura 3.2: Una completa imagen de la operacin del Filtro Kalman, combinando el diagrama de alto nivel de la figura 3.1 con las ecuaciones de la tabla 3.1 y 3.2

3.3. Filtro Kalman Extendido

3.4. Un ejemplo: El cálculo de una constante aleatoria

3.4.1. El modelo del proceso

En este sencillo ejemplo vamos a tratar de estimar una constante aleatoria escalar, una medición de sensor infrarrojo por ejemplo. Supongamos que tenemos la capacidad para tomar mediciones de la constante, pero que las mediciones están dañados por un ruido blanco de 0.1 de medición. En este ejemplo, el proceso se rige por la ecuación diferencial lineal

$$\begin{aligned}x_k &= Ax_{k-1} + Bu_k + w_k, \\ &= x_{k-1} + w_k\end{aligned}$$

con una medición $z \in \mathfrak{R}^1$ que es

$$\begin{aligned}z_k &= Hx_k + v_k, \\ &= x_k + v_k\end{aligned}$$

El estado no cambia de paso a paso así que $A=1$. No hay entrada de control así que $u=0$. Nuestra medición de ruido es de forma directa el estado así que $H=1$. (Nótese que dejó caer el subíndice k en varios lugares ya que los parámetros respectivos quedan constantes en nuestro modelo simple.)

3.4.2. Las ecuaciones del Filtro y los Parámetros

Nuestras ecuaciones de actualización de tiempo son

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1}, P_k^- = P_{k-1} + Q,$$

y las ecuaciones de actualización de medición son

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- (P_k^- + R)^{-1} \\ &= \frac{P_k^-}{P_k^- + R}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \hat{x}_k^-), \\ P_k &= (1 - K_k P_k^-). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Suponiendo una variación del proceso muy pequeña, dejamos $Q = 1e - 5$. (Desde luego, podríamos dejar $Q = 0$ pero suponiendo un valor pequeño, pero no cero nos da más flexibilidad en el "ajuste" del filtro como se demostrará más adelante.) Vamos a suponer que por experiencia sabemos que el verdadero valor de la constante aleatoria tiene una distribución de probabilidad normal estándar, por lo que será la "semilla" de nuestro filtro con la conjetura de que la constante es 0. En otras palabras, antes de comenzar dejamos $\hat{x}_{k-1} = 0$.

Del mismo modo necesitamos elegir un valor inicial para P_{k-1} , llamado P_0 . Si tuviéramos absoluta certeza de que nuestra estimación del estado inicial $\hat{x}_0 = 0$ fue correcta, dejamos $P_0 = 0$. Sin embargo dada la incertidumbre en la estimación inicial \hat{x}_0 , seleccionando $P_0 = 0$ podría causar que el filtro inicialmente y siempre crea que $\hat{x}_k = 0$. Como resultado, la alternativa no es crítica. Podríamos elegir casi cualquier $P_0 \neq 0$ y el filtro podría converger con el tiempo. Vamos a empezar nuestro filtro con $P=1$.

3.4.3. Las simulaciones

Para empezar, se escogió el valor idóneo del sensor infrarrojo el cual será nuestra constante escalar $z=512$ (no hay un "sombbrero" en la z , ya que representa la "verdad"). A continuación se simularon 20 veces 100 mediciones distintas z_k con un error distribuido normalmente en torno a cero, con una desviación estándar de 0,1 (recordar se presume que las mediciones están afectadas por un 0.1 de medición de ruido blanco)

En la primera simulación fijamos la varianza de la medición en $R = (0,1)_2 = 0,01$. Porque esta es la "verdadera" varianza del error de medición, podríamos esperar que el "mejor" desempeño en términos de capacidad de respuesta de equilibrio y la varianza estimada. Esto se hará más evidente en la simulación de la segunda y tercera. Figura 4.4 muestra los resultados de la mejor simulación. El verdadero valor de la constante aleatoria $x=512$ está dada por la línea continua, las mediciones de ruido marcadas en forma de cruz, y la estimación del filtro por la curva restante.

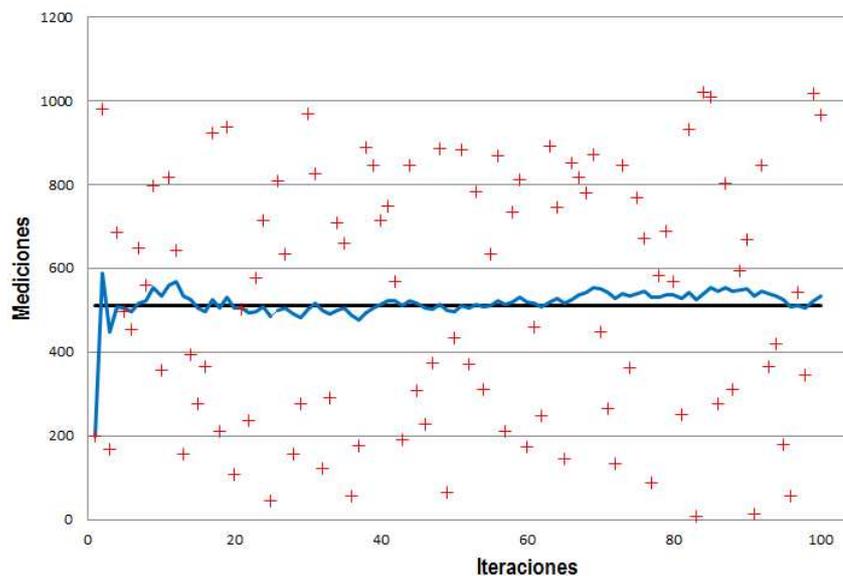


Figura 3.3: De las 20 simulaciones realizadas se presenta la de mejor desempeño. Los valores verdaderos de la constante aleatoria está dada por la línea continua, las mediciones de ruido por las marcas de cruz, y la estimación del filtro por la curva restante.

Al considerar la opción P_0 de arriba, hemos mencionado que la elección no era crítica como $P_0 = 0$ porque el filtro finalmente converge. A continuación en la Figura 4.5 se presenta el valor de P_k contra el valor de la iteración. Por la iteración número 100, que se ha establecido a partir de la inicial (en bruto) elección de 0.01 a aproximadamente 0,0002.

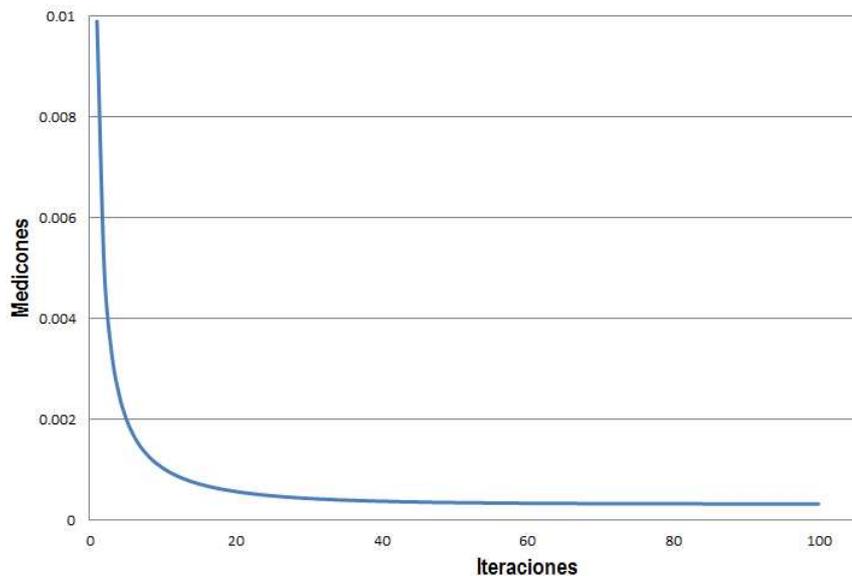


Figura 3.4: Después de 100 iteraciones, nuestra inicial covarianza de error P_k elegida como 0.01 se ha asentado cerca de 0.002

En la Figura 4.6 y Figura 4.7 a continuación podemos ver lo que ocurre cuando R se incrementa o se disminuye en un factor de 100, respectivamente. En la figura 4.6 el filtro se ha dicho que el varianza de medición fue 100 veces mayor ($R=0.01$) lo que será mas lento

Mientras que la estimación de una constante es relativamente sencillo, que demuestra claramente el funcionamiento del filtro de Kalman. En la figura 4.6, en particular, la Kalman "filtrado" es evidente que la estimación aparece considerablemente más suave que las mediciones de ruido.

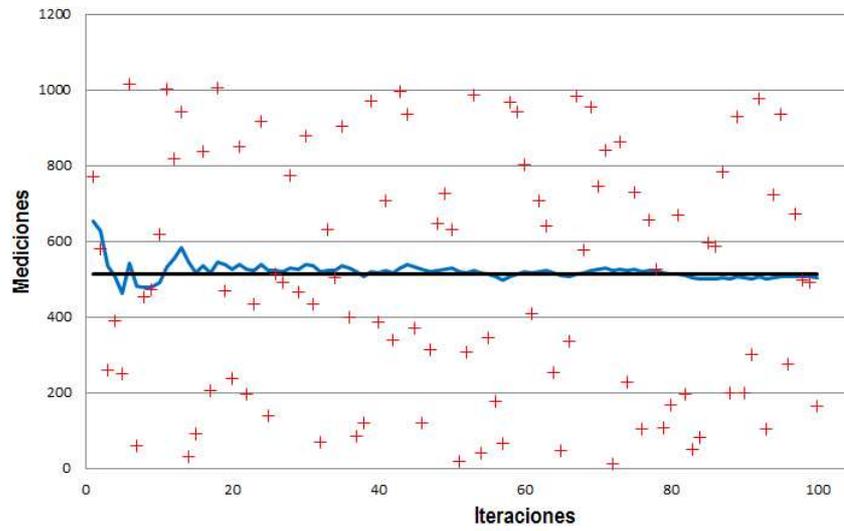


Figura 3.5: Segunda Simulación $R=1$. El filtro es más lento de responder a las mediciones, lo que resulta en la estimación de varianza reducida.

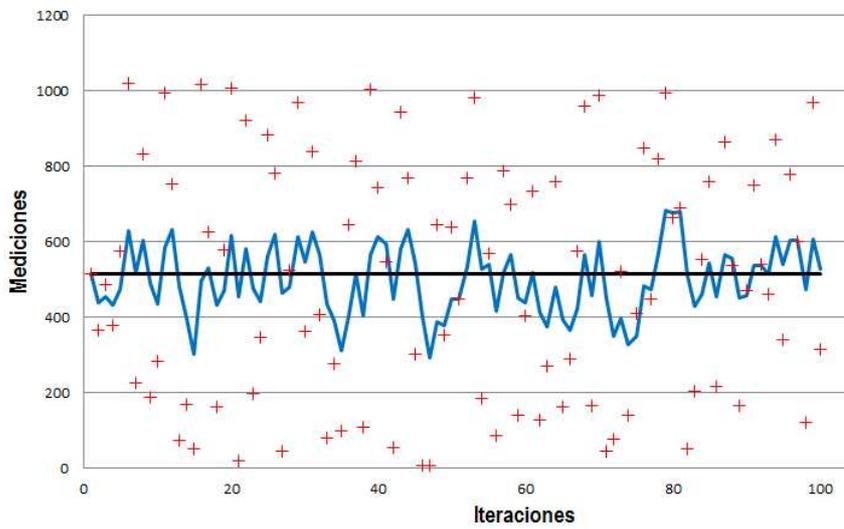


Figura 3.6: Tercera Simulación. El filtro responde a mediciones con rapidez, lo que aumenta la varianza de estimación.

Capítulo 4

Elementos Matemáticos

4.1. Probabilidad y variables aleatorias

4.1.1. Probabilidad

La mayoría de nosotros tenemos alguna idea de lo que se entiende por una ocurrencia al azar”, o la probabilidad de que algún evento en un espacio muestral se va a producir. Formalmente, la probabilidad de que el resultado de un evento discreto (por ejemplo, un cara o cruz) favorecerá a un evento en particular se define como

$p(A) = \frac{\text{Posibles resultados a favor de un evento } A}{\text{Número total de posibles resultados}}$

La probabilidad de un resultado a favor de cualquier A o B está dada por

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad (2,1) \tag{4.1}$$

Si la probabilidad de los dos resultados es independiente (no afecta a la otra), entonces la probabilidad de ambos ocurre es el producto de sus probabilidades individuales:

$$p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B) \quad (2,2) \tag{4.2}$$

Por ejemplo, si la probabilidad de ver una lado de una moneda en cara o cruz es $1/2$,

entonces la probabilidad de encontrar caras de ambos de dos monedas al mismo tiempo es $1/4$. (Es evidente que el resultado de un lanzamiento de moneda no afecta a la otra.)

Finalmente, la probabilidad de un resultado A dado la ocurrencia de un resultado B se llama probabilidad condicional de A dado B, y se define como:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (2,3) \quad (4.3)$$

4.1.2. Variables aleatorias

A diferencia de eventos discretos, en el caso de seguimiento y captura de movimiento, estamos más interesados con la aleatoriedad asociada con un continuo voltaje eléctrico o tal vez un movimiento del usuario. En cada caso, podemos pensar en el tema de interés como una variable aleatoria continua. Una variable aleatoria es esencialmente una función que mapea todos los puntos en el espacio real de los números reales. Por ejemplo, la variable aleatoria continua podría asignar tiempo a la posición. En cualquier punto en el tiempo, nos diría la posición esperada.

En el caso de variables aleatorias continuas, la probabilidad de cualquier evento discreto A es de hecho 0. Esto es $p(A) = 0$. En lugar de eso sólo se puede evaluar la probabilidad de eventos dentro de un cierto intervalo. Una función común que representa la probabilidad de variables aleatorias es definida como la función de distribución acumulativa

$$F_X(x) = p(-\infty, x) \quad (2,4) \quad (4.4)$$

Esta función representa la probabilidad acumulada de la variable aleatoria continua X para todos los eventos (incontables) hasta e incluyendo x. Propiedades importantes de los efectos acumulativos función de densidad son:

1. $F_X(x) \rightarrow 0$ como $x \rightarrow -\infty$

2. $F_X(x) \rightarrow 1$ como $x \rightarrow +\infty$
3. $F_X(x)$ es una función no decreciente de x

Aún más frecuente usada la ecuación (2.4) es su derivado, conocido como la función densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) \quad (2,5) \quad (4.5)$$

Siguiendo con las propiedades anteriormente dado de la función de probabilidad acumulada, la función de densidad también tiene las siguientes propiedades:

1. $f_X(x)$ no es una función negativa
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Por último destacar que la probabilidad en cualquier intervalo $[a, b]$ se define como:

$$P_X[a, b] = \int_a^b f_X(x)dx$$

Así que en lugar de sumar las probabilidades de eventos discretos como en la ecuación (2.1) para una variable aleatoria continua integra la función densidad de probabilidad sobre los intervalos de interés.

4.1.3. La Media y la Varianza

La mayoría de nosotros estamos familiarizados con la noción de la media de una secuencia de números. Para algunos N muestras de una variable aleatoria discreta X , la media o promedio de la muestra está dada por

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

Debido a que en el seguimiento que se trata de señales continuas con un espacio de muestra incontable), es útil pensar en términos de un número infinito de pruebas, y en consecuencia el resultado que habría esperar para ver si tomamos muestras de la variable aleatoria infinita, cada vez que veamos a uno de los n posibles resultados $X_1 \dots X_n$. En este caso, el valor esperado de la variable aleatoria discreta puede ser aproximada por un promedio de eventos ponderado por su probabilidad:

$$\bar{X} \approx \frac{(p_1 N)X_1 + (p_2 N)X_2 + \dots + (p_n N)X_n}{N}$$

En efecto, de los N ensayos, podríamos esperar para ver $(p_1 N)$ ocurrencias del evento X_1 , etc. Esta noción de ejemplos infinitos conduce a la definición convencional del valor esperado para variables aleatorias discretas.

Valor esperado de $X =$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (2,6) \quad (4.6)$$

Para n posibles resultados $x_1 \dots x_n$ y probabilidades correspondientes $p_1 \dots p_n$. Del mismo modo para la variable aleatoria continua el valor esperado se define como

Valor esperado de $X =$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (2,7) \quad (4.7)$$

Por último, señalamos que la ecuación (2.6) y la ecuación (2.7) pueden ser aplicadas a las funciones de la variable aleatoria X de la siguiente manera:

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^n p_i g(x_i) \quad (2,8) \quad (4.8)$$

Y

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2,9) \quad (4.9)$$

El valor esperado de una variable aleatoria es también conocido como el primer momento estadístico. Nosotros podemos aplicar la noción de la ecuación (2.8) o (2.9),

dejando $g(X) = X^k$, para obtener el k^{esimo} momento estadístico. En el k^{esimo} momento estadístico de una variable aleatoria continua X está dada por

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx \quad (2,10) \quad (4.10)$$

Es de particular interés en general, y para nosotros en particular, el segundo momento de la variable aleatoria. El segundo momento esta dado por

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \quad (2,11) \quad (4.11)$$

Cuando tenemos $g(X) = X - E(X)$ y aplicamos la ecuación (2.11), obtenemos la varianza de la señal sobre la media. En otras palabras,

$$\begin{aligned} \text{Varianza } X &= E[(X - E(x))^2] \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

La varianza es una propiedad estadística de gran utilidad para las señales aleatorias, porque si conociéramos la varianza de una señal de que se suponía iba a ser de otra manera "constante" en torno a algunos valores de la media, La magnitud de la varianza nos daría una idea de la cantidad de jitter o ruido" en la señal.

La raíz cuadrada de la varianza, conocida como la desviación estándar, es también una unidad de medida estadística util, porque mientras que siempre sea positiva, tiene (a diferencia de la varianza) las mismas unidades que la señal original. La desviación estándar está dada por

$$\text{Desviación Estándar de } X = \sigma X = \sqrt{\text{varianza}} \text{ de } X$$

4.1.4. Distribución Normal o Gaussiana

Una distribución de probabilidad especial conocida como la Distribución Normal o Gaussiana históricamente ha sido popular en el modelado de sistemas aleatorios por una

variedad de razones. Pues resulta que, muchos de los procesos aleatorios que ocurren en la naturaleza en realidad parecen ser normalmente distribuidos, o muy cerca.

De hecho, bajo ciertas condiciones moderadas, se puede demostrar que una suma de variables aleatorias con cualquier distribución tiende hacia una distribución normal. El teorema que afirma formalmente esta propiedad se llama el *teorema del límite central*. Por último, la distribución normal tiene algunas propiedades agradables que la hacen matemáticamente tratable e incluso atractiva.

Dado un proceso aleatorio $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, es decir, un proceso aleatorio continuo X que es distribuido normalmente con media μ y varianza σ^2 (desviación estándar σ), la función densidad de probabilidad para X está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Para $-\infty < x < \infty$. Cualquier función lineal de un proceso de distribución normal aleatorio (variable) es también un proceso aleatorio normalmente distribuido. En particular, si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $Y = aX + b$, entonces

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \quad (4.12)$$

La función densidad de probabilidad para Y entonces está dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-(a\mu+b))^2}{a^2 \sigma^2}} \quad (4.13)$$

Por último, si X_1 y X_2 son independientes (véase la sección 2.5), $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, entonces

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (4.14)$$

y la función densidad se convierte en

$$f_X(x_1 + x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-(\mu_1+\mu_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \quad (4.15)$$

4.1.5. Independencia continua y Probabilidad Condicional

Finalmente observamos que, como con el caso discreto y ecuaciones (2.2) y (2.3) la independencia y probabilidad condicional están definidas para variables aleatorias continuas. Dos variables aleatorias continuas X y Y se dice que son estadísticamente independientes si su probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ es igual al producto de sus probabilidades individuales. En otras palabras, son consideradas independientes si

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

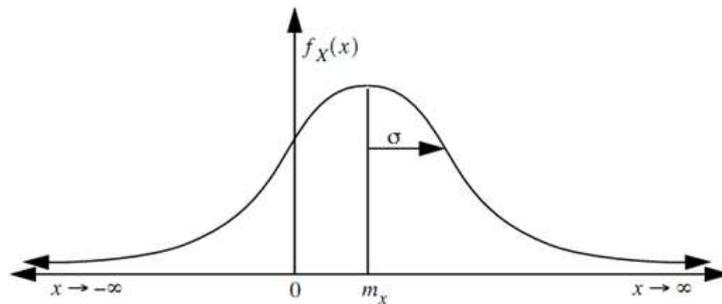


Figura 4.1: Función de la distribución de probabilidad Normal o Gaussiana

4.1.6. Regla de Bayes

Además, la regla de Bayes se sigue de la ecuación (2.3), ofreciendo una manera de especificar la densidad de probabilidad de la variable aleatoria X dada (en la presencia de) la variable aleatoria Y . La regla de Bayes está dada como

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{X|Y}(y)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

4.1.7. Continuo-discreto

Dado un proceso discreto X y un proceso continuo Y , la función discreta de probabilidad de masa para X condicionada en $Y = y$ está dada por

$$p_X(x|Y = y) = \frac{f_Y(y|X = x)p_X(x)}{\sum_z f_Y(y|X = z)p_X(z)} \quad (4.16)$$

Tenga en cuenta que esta fórmula ofrece una probabilidad discreta basada en la densidad acondicionada, sin ninguna integración.

4.1.8. Ruido Blanco

Un caso importante de una señal aleatoria es el caso donde la función de autocorrelación es una función delta de Dirac $\delta(\tau)$ el cual tiene valor cero en todas partes, excepto cuando $\tau = 0$. En otras palabras es decir, el caso donde

$$R_X(\tau) =$$

para alguna magnitud constante A . En este caso especial donde la autocorrelación es un "pico" la transformada de Fourier resulta en un espectro de frecuencia *constante*. Como se muestra en la siguiente figura

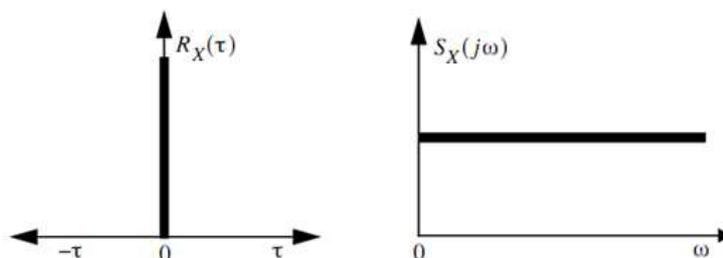


Figura 4.2: El ruido blanco se muestra tanto en el tiempo (izquierda) y el dominio de la frecuencia (derecha).

Esto es de hecho una descripción de *ruido blanco*, el cual se pensó teniendo un peso en todas las frecuencias del espectro, y siendo completamente sin correlación con el mismo

en cualquier momento excepto en el presente ($\tau = 0$). Esta última interpretación es lo que lleva las señales de ruido blanco para ser llamadas *independientes*. Cualquier muestra de la señal al mismo tiempo es completamente independiente (sin correlación) de una muestra en cualquier otro momento.

Mientras es imposible de lograr o ver en la práctica (ningún sistema puede exhibir la energía infinita a lo largo de un espectro infinito), el ruido blanco es un elemento importante para el diseño y análisis. A menudo las señales aleatorias se pueden modelar como filtrado o forma de ruido blanco. Literalmente esto significa que se podría filtrar la salida de una fuente (hipotética) de ruido blanco para lograr una fuente de ruido no blanco o de color que es de banda limitada en el dominio de la frecuencia, y de una mayor correlación en el dominio del tiempo.

4.1.9. Estimación estocástica

Aunque hay muchos enfoques específicos de la aplicación de la estimación de un estado desconocido de un conjunto de mediciones de procesos, muchos de estos métodos no toman en cuenta la naturaleza de las medidas de ruido general.

4.1.10. Modelos Espacio - Estado

Los modelos espacio - estado son esencialmente una conveniencia de notación para el cálculo y control de problemas, desarrollados para hacer manejables lo que sería un análisis de notación intratable. Considere un proceso dinámico descrito por una ecuación de diferencia de orden n-ésima (Al igual que una ecuación diferencial) de la forma,

$$y_{i+1} = a_{0,i} y_i + \dots + a_{n-1,i} y_{i-n+1} + u_i, i \geq 0$$

donde u_i es proceso de ruido (espectro) aleatorio blanco de media cero (estadísticamente) con auto correlación,

$$E(u_i, u_j) = R_u = Q_i \delta_{ij},$$

y los valores iniciales $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-n+1}$ son variables aleatorias de media cero con una conocida matriz de covarianza de $n \times n$

$$P_0 = E(y_{-j}, y_{-k}), j, k \in 0, n-1$$

También se supone que

$$E(u_i, y_j) = 0 \text{ para } -n+1 \leq j \leq 0 \text{ y para } i \geq 0$$

lo cual asegura que

$$E(u_i, y_i) = 0, i \geq j \geq 0$$

En otras palabras, el ruido es estadísticamente independiente del proceso ha ser estimado. Bajo algunas otras condiciones básicas de esta ecuación diferencial puede ser re-escrita como

$$\hat{x}_{i+1} \equiv \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \\ \vdots \\ y_{i-n+2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \vdots \\ y_{i-n+1} \end{bmatrix}}_{\hat{x}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_G u_i$$

Figura 4.3: Ecuación diferencial

lo que lleva al modelo estado-espacio

$$x_{i+1}^> = Ax_i^> + G u_i$$

$$y_i^> = [10 \dots 0] x_i^>$$

o de la forma más general

$$x_{i+1}^> = Ax_i^> + G_{ui}(3,1) \quad (4.17)$$

$$y_i^> = H_i x_i^> (3,2) \quad (4.18)$$

La ecuación (3.1) representa la forma en que un nuevo estado $i + 1$ es modelado como una combinación lineal tanto del estado anterior i y un poco de ruido del proceso ui . La ecuación (3.2) describe la forma en que las mediciones del proceso o observaciones i son derivadas del estado interno i . Estas dos ecuaciones a menudo se hace referencia, respectivamente, como el modelo del proceso y el modelo de la medición, y sirven como base para casi todos los métodos de estimación lineal, como el Filtro de Kalman que se describe a continuación.

4.1.11. El problema de diseño observado

Hay un problema relacionado en general en el área de la teoría de sistemas lineales generalmente llamado el problema de diseño observado. El problema básico es determinar (estimar) los estados internos de un sistema lineal, teniendo solo acceso a las salidas del sistema. Esto es similar a lo que la gente suele pensar como el problema de "La caja negra" donde se tienen acceso a algunas señales que vienen de la caja (las salidas), pero no puedes observar directamente lo que hay dentro.

Los muchos enfoques a este básico problema son típicamente basados en el modelo espacio - estado presentado anteriormente.

Normalmente hay un modelo de proceso que modela la transformación del estado del proceso. Esto por lo general puede ser representado como una ecuación de diferencia estocástica lineal similar a la ecuación (3.1)

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1}(3,3) \quad (4.19)$$

Además, existe algún tipo de modelo de medición que describe la relación entre el estado del proceso y las mediciones. Esto se puede representar con una expresión lineal similar a la ecuación (3.2):

$$Z_k = Hx_k + V_k \quad (3,4) \quad (4.20)$$

Los términos w_k y v_k son variables aleatorias que representan el proceso y la medición del ruido respectivamente. Tenga en cuenta que en la ecuación (3.4) hemos cambiado la variable dependiente z_k en lugar de y_k como en la ecuación (3.2). La razón fundamental es reforzar la idea de que las medidas que no tienen que ser de los elementos del Estado en concreto, pero puede ser cualquier lineal combinación de los elementos del estado.

4.1.12. Medición y ruido del proceso

Consideramos aquí el caso común de las mediciones del sensor ruidoso. Hay muchas fuentes de ruido en estas mediciones. Por ejemplo, cada tipo de sensor tiene limitaciones fundamentales relacionadas con el medio físico asociado, y al presionar sobre estas limitaciones las señales suelen ser degradadas. Además, cierta cantidad de ruido eléctrico aleatorio se añade a la señal a través del sensor y los circuitos eléctricos. La proporción diferente de tiempo de de la señal "pura." El ruido eléctrico afecta continuamente la *cantidad* y la *calidad* de la información. El resultado es que la información obtenida de cualquier sensor debe ser calificado como que es interpretado como parte de una secuencia general de estimaciones, y los modelos de medición analíticos suelen incorporar una noción de medición del ruido aleatorios o incertidumbre.

Existe el problema adicional de que el modelo de transformación del estado actual es completamente desconocido. Mientras que podemos hacer predicciones sobre intervalos relativamente cortos el uso de modelos basados en transformaciones de estado recientes, tales predicciones suponen que las transformaciones son predecibles, lo cual

no es siempre el caso. El resultado es que la información del sensor, como estimaciones actuales del estado deben ser calificados como se combinan con las mediciones en una secuencia general de estimaciones. Además, los modelos de procesos suelen incorporar alguna noción de movimiento aleatorio o incertidumbre.

Bibliografía

- [1] Robótica.
- [2] Amancio-Wikispaces. Introducción a la robótica, 2009. Curso a distancia en línea organizado por el CFIE Valladolid II para Castilla y León.
- [3] Mando Bots. Clasificación de los robots.
- [4] Amador Flores Flores. Evasión de obstáculos a través de sensores de proximidad. Reporte técnico PII-26-08-09, Universidad Politécnica de Puebla, Puebla, Agosto 2009. Reporte técnico publicado por una escuela o institución, usualmente está numerado.
- [5] José E. Simón Joan Vila Alfonso Crespo Ginés Benet, Francisco Blanes. Desarrollo de sistemas de robótica móvil en entornos de trabajo industriales. Reporte técnico, Universidad Politécnica de Valencia, 46080 Valencia(España), Junio 2005. Departamento de Informática de Sistemas y Computadores (DISCA).
- [6] Alí Martínez González. Construcción de un vehículo con control de seales para movimientos básicos. Reporte técnico PII-07-04-09, Universidad Politécnica de Puebla, Puebla, Abril 2009. Reporte técnico publicado por una escuela o institución, usualmente está numerado.

- [7] Diego Rodríguez-Losada González. *SLAM Geométrico en Tiempo Real Para Robots Móviles en Interiores Basado en EKF*. Tesis de doctorado, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, 2004. Tesis de doctorado. Los primeros cuatro campos son obligatorios.
- [8] R. SALAZAR J. RUIZ DEL SOLAR. Introducción a la robótica - robots móviles. Technical report, Universidad de Chile Facultad de CS. FS. y Matemáticas.
- [9] Karina Paterno Materno. Investigación realizada. Reporte técnico PII—, Universidad Politécnica de Puebla, Puebla, Mes 2009. Reporte técnico publicado por una escuela o institución, usualmente está numerado.
- [10] Jose Maria Caas Plaza. Programación de robots móviles. Reporte técnico, Universidad Rey Juan Carlos, 2004. Departamento de Ingeniería Eléctrica.
- [11] S. Thrun. *Robotic Mapping: A Survey*. 2002. Libro. los primeros cuatro datos son obligatorios.
- [12] José A. Cabero Esteban Víctor R. González Fdez, Antonio López Cruzado. Control y robótica.